A. gr. b.
2726

A. gr. b. 2726

~~1819~~

(Plato)
Müller

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

<36604495280011

<36604495280011

Bayer. Staatsbibliothek

Commentar

über zwey

dunkle mathematische Stellen in Plato's Schriften,

wovon

die eine im Theätet, die andere im Meno vorkommt,

von

Johann Wolfgang Müller,

Lehrer der Mathematik am Gymnasium zu Nürnberg.

Mit einer Kupfertafel.

Nürnberg,
bey Georg Paul Pech, Kunst- u. Buchhändler.
1797.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorrede.

Der Endzweck dieser Schrift ist, die Hindernisse, welche die beyden im Theätet und Meno vorkommenden mathematischen Stellen bisher unverständlich machten, aus dem Weg zu räumen, und dadurch jedem dieser Dialogen den Zusammenhang wieder zu geben, den sie nach der Absicht ihres Verfassers haben sollen. Man glaubte bisher, daß der Text sehr ver-

verdorben sey, ich werde aber zeigen, daß in der Stelle im Theätet nur ein einziger grammaticalischer Fehler vorkommt, und daß die Stelle im Meno durch die Verwandlung zweier Wörter in ähnlich lautende, einen passenden Sinn erhält. Bey der Stelle im Theätet fand ich nirgends etwas vorgearbeitet, der Commentar des Proclus, der auch hierüber einen befriedigenden Aufschluß geben möchte, ist verlohren gegangen, ich hoffe ihn in mathematischer Rücksicht durch diese Schrift zu ersetzen. Die Stelle im Meno, an der wahrscheinlich mehrere gekünstelt, und dadurch die ursprüngliche

Lesart

Lesart, die ich zu restituiren suche, verdorben haben, hat unter den Neuern bekanntlich Herr Gedike in seiner deutschen Uebersetzung des Meno zu erklären versucht. Die Gründe, die mich überzeugten, daß ihm dieser Versuch mislungen sey, finden sich am Ende dieser Schrift. Daß bey dem mathematischen Commentar über die im Theätet vorkommende Stelle, das 10 Buch in Euclids Elementen zum Grunde liegt, brauch' ich Kennern der Mathematik nicht zu sagen. Aber diese Schrift ist zunächst mehr für Philologen als für eigentliche Mathematiker bestimmt, und aus diesem Gesichts-

punkt

punkt bitte ich die hin und wieder vorkommenden Weitschweifigkeiten zu beurtheilen.

Nürnberg, den 5ten Febr. 1797.

Joh. Wolfgang Müller.

Einleitung.

Das Gespräch des Plato, welches den Namen Theätet führt, zeichnet sich vor seinen andern Gesprächen, durch die ästhetische Kunst, welche dabey so wohl in der Einkleidung, als in der Characterzeichnung angebracht ist, vorzüglich aus. Die Hauptperson, Theätet, ist fast noch ein Knabe, der zwar Talente und Energie besitzt, aber noch zu jugendlich denkt, und auf einer zu niedern Stuffe der wissentschäftlichen Kenntnisse steht, als daß seine Aeusserungen mit den Begriffen der gebildeten Leser in eine befriedigende Harmonie sich auflösen könnten. Das feine Gefühl des philosophischen Dichters ahndete

dere diese dem guten Geschmack nachtheilige Wirkung, und suchte ihr dadurch vorzubeugen, daß er die Leser für Theätet gewinnt, ehe er ihn noch auftretten läßt. Er setzt alle Triebfedern in Bewegung, wodurch ein persönliches Interesse bewirkt werden kann, und giebt den jugendlichen Meinungen dadurch ein geltendes Gepräge, daß er der Einbildungskraft, in diesem Jüngling den Mann vorstellt, der den Ruff eines edeln und tapfern Bürgers hat, der im Kampf für das Vaterland sein Leben aufzuopfern bereit ist, der ganz den Erwartungen entspricht, die einst sein Lehrer Theodor von ihm faßte, und der durch die Prophezeiung des dem Tode nahen Socrates, schon in seiner Jugend der Leitung und Aufsicht eines guten Genins geweiht wurde. Aber diese Maschinerie ist so künstlich versteckt, und die ästhetische Täu-

schung so weit getrieben, daß der Leser bey der ersten Lectüre von Natur, Wahrheit und Einfalt hingerissen wird.

Plato versezt nehmlich den Leser in die Gesellschaft zweyer Freunde, des Euclides und Terpsion, die miteinander zusammentreffen, zu einer Zeit, wo Socrates lange tod, und Theätet schon ein Mann war, der sich durch mehrere Handlungen um sein Vaterland verdient gemacht hatte. Dieser Mann, von dem sich seine Mitbürger noch viel zu versprechen haben, wird eben aus dem Lager mit Wunden bedeckt, und von einer gefährlichen Krankheit befallen, in seine Vatterstadt zurückgebracht. Terpsion und Euclides, die ihn von Person kennen, schildern seinen vortreflichen Charackter, und seine Kenntnisse im Kriegswesen. Euclides erinnert sich iezt an die Worte des

So-

Socrates. Dieser hatte nehmlich kurz vor seinem Tod, eine Unterredung mit dem damals noch jungen Theátet gehabt, in der er den Geist des Jünglings prüfte, und schon im Voraus den edeln Mann und brauchbaren Staatsbürger verkündigte. Terpsion ist begierig, die nähern Umstände, und den Inhalt dieser Unterredung zu wissen. Euclides verspricht seine Neugierde zu befriedigen, weil er das ganze Gespräch, so wie es ihm Socrates erzählte, nachgeschrieben hatte, und ruft einen Sclaven, um es vorzulesen. Die Personen, die in diesem Gespräch vorkommen, sind anfangs Socrates und der Geometer Theodor. Socrates erkundigt sich bey ihm nach seinen Schülern, und fragt: welche die geschicktesten und fleißigsten wären? Theodor rühmt einen gewissen Theátet, als einen Jüngling, der Wißbegierde, Thätigkeit,

Gelehrigkeit, Folgsamkeit und Bescheidenheit in sich vereinigt, Eigenschaften, die wie Theodor selbst gesteht, selten bei einander angetroffen werden. Zugleich aber versichert er, daß er nicht von der Schönheit des Aeusserlichen dieses Jünglings zu Lobserhebungen hingerissen werde, denn, sagt er zu Socrates: „er hat eine eingedrückte Nase und hervorstehende Augen, wie Du.“

Ein neuer Kunstgriff des Plato, um die Leser für Theätet einzunehmen: denn diese so wenig gefällige Physionomie, läßt wegen ihrer Aehnlichkeit mit der des Socrates, eine vortrefliche Gemüthsbeschaffenheit vermuthen. Zugleich benutzt Plato diesen Umstand, um ein Gespräch mit Theätet, der eben in Gesellschaft mehrerer iungen Leute herbeykommt, einzuleiten. Nun zeigt er seine Kunst in

der Zeichnung der Charactere der redenden Personen. Socrates braucht viele Mühe, das Zutrauen des schüchternen Jünglings zu gewinnen, aber noch grösere Schwierigkeiten findet er, um den Theodor in das Gespräch zu verwickeln, weil sich dieser lange sträubt, aus Furcht sich vor seinen Schülern blos zu geben. Endlich gelingt ihm beydes. Das leztere, durch die Apologie des Protogoras, für den Theodor eingenommen war; das erstere, durch Vertraulichkeit, Lob, Scherz und Entflammung der Wisbegierde. Auf diese Art war er im Stande zu prüfen, ob ein Keim des Guten und eine Anlage zum Wissenschäftlichen in dem iungen Menschen verborgen wäre, und nachdem er sich davon überzeugt hatte, so suchte er diesen Keim zu entwickeln, und die Frucht, wie er sich selbst ausdrückt, nach Art der Hebammen ans Tageslicht

zu bringen. Dieses wollte er nun mit der vorgelegten Frage, was Wissenschaft ist, bewirken, eine Frage, die für jeden Jüngling, der sich den Wissenschaften widmet, anziehend sein muß. Theätet gab verschiedene Erklärungen, wovon die erste von seiner Erfindung war, die andern aber das Eigenthum älterer Philosophen sind, mit deren Lehrsätzen er sich einigermassen bekannt gemacht hatte.

Der erste Versuch mislang ganz. Socrates suchte ihn davon zu überzeugen, indem er ihm vorstellte, daß diese Erklärung nicht zu der vorgelegten Frage passe, und ihm zeigte, wie sie beschaffen seyn sollte. Nun erinnerte sich Theätet, daß in der Mathematik auch öfters der Fall eintritt, wo man Erklärungen von gewissen Gegenständen geben muß, und

daß er selbst vor einiger Zeit mit Hülfe seiner iungen Freunde versucht hatte, zu erklären, was eine Potenz sey. Er trägt also die Art, wie er dabey verfuhr, dem Socrates vor, um von ihm zu vernehmen, ob er es recht gemacht habe, und ob er iezt auf eine ähnliche Art verfahren dürfe. Dieses ist eben der Inhalt der mathematischen Stelle, die ich hier, wie sie im Original lautet, vortragen und dann erläutern will.

Mathematische Stelle im Theátet.

Θεαίτητος.

Περί δυνάμεων τὶ ἡμῖν Θεόδωρος ὅδε ἔγραφε, τῆς τε τρίποδος πέρι καί πεντέποδος, ἀποφαίνων ὅτι μήκει οὐ ξύμμετροι τῇ ποδιαίᾳ. Καί οὕτω κατά μίαν ἑκάϛην προαιρούμενος, μέχρι τῆς ἑπτακαιδεκάποδος, ἐν δὲ ταύτῃ πως ἐνέσχετο, ἡμῖν οὖν εἰσῆλθέ τι τοίουτον, ἐπειδή ἄπειροι τό πλῆθος αἱ δυνάμεις ἐφαίνοντο, πειραθῆναι συλλαβεῖν εἰς ἕν ὅτῳ πάσας ταύτας προσαγορεύσωμεν τὰς δυνάμεις.

Σωκράτης.

Ἦ καί εὕρετέ τι τοιοῦτον;

Θεαίτητος.

Ἔμοιγε δοκοῦμεν, σκόπει δέ καί σύ.

Σωκράτης.

Λέγε.

Θεαί-

Θεαίτητος.

Τόν ἀριθμόν πάντα δίχα διελάβομεν, τόν μὲν δυνάμενον ἴσον ἰσάκις γίγνεσθαι, τῷ τετραγώνῳ τό σχῆμα απεικάσαντες, τετράγωνόν τε καὶ ἰσόπλευρον προσείπομεν.

Σωκράτης.

Καί εὖ γε.

Θεαίτητος.

Τὸν τοίνυν μεταξὺ τούτων, ὧ καὶ τὰ τρία καὶ τὰ πέντε, καὶ πᾶς ὃς ἀδύνατος ἰσάκις ἴσος γενέσθαι, ἀλλ᾽ ἢ πλείων ἐλαττονάκις, ἢ ἐλάττων πλεονάκις γίγνεται, μείζων δὲ καὶ ἐλάττων ἀεὶ πλευρὰ αὐτὸν περιλαμβάνει, τῷ προμήκει αὖ σχήματι ἀπεικάσαντες, προμήκη ἀριθμόν ἐκαλέσαμεν.

Σωκράτης.

Κάλλιστα, ἀλλὰ τί τὸ μετὰ τοῦτο;

Θεαίτητος.

Ὅσαι μὲν γραμμαὶ τὸν ἰσόπλευρον καί ἐπίπεδον ἀριθμὸν τετραγωνίζουσι, μῆκος ὡρισάμεθα· ὅσαι δέ τόν ἑτερομήκη, δυνάμεις· ὡς

μήκει

μήκει μὲν οὐ ξυμμέτρους ἐκείναις, τοῖς δ᾽ἐπιπέδοις, ἃ δύνανται, καί τά ςερεά ἄλλο τοιοῦτον.

Uebersetzung dieser Stelle.

Theätet.

Theodor da, verfertigte für uns einen Aufsatz über die Potenzen, und bewieß, daß die dreyfache und fünffache mit der einfachen in Länge incommensurabel sey. So untersuchte er jede, bis zur siebzehnfachen, hier blieb er stehen. Wir kamen nun auf einen ähnlichen Gedanken. Wir suchten nehmlich alle Potenzen, deren unendlich viele möglich sind, unter einen allgemeinen Begriff zu vereinigen.

Socrates.

Habt ihr auch so etwas gefunden?

Theätet.

Ich glaube, ja, doch urtheile Du selbst.

Socrates.

Laß hören.

Theätet.

Wir zerlegten jede vorkommende Zahl in Paare von Factoren. Fanden wir nun, daß eine ein Product aus zwey gleichen Factoren war, so verglichen wir sie mit einem Quadrat, und nennten sie eine viereckigte gleichseitige Zahl.

Socrates.

Ganz recht.

Theätet.

Eine Zahl aber, die zwischen dergleichen Zahlen fällt, wie z. B. drey und fünf, und überhaupt jede, die kein Product aus zwey gleichen Factoren seyn kann, sondern in der die paarweise zusammen gehörigen Factoren ungleich sind, die aber doch immer von dem grössern und kleinern Factor genau gemessen wird, verglichen wir mit einem länglichten Rechteck, und nennten sie eine länglichte Zahl.

Socrates.

Vortreflich, aber wie weiter?

Theätet.

Die Seite nun des Quadrats, welches das Schema der gleichseitigen Zahl ist, definirten wir: Rationallinie. Die Seite aber des Quadrats, welches das Schema der länglichten Zahl ist, nennten wir eine Potenz. Diese können nun mit jenen in Länge nicht commensurabel seyn, aber wohl im Quadrat. Und so fanden wir auch bey Körpern etwas dergleichen.

Anmerkungen und Erläuterungen.

Jede ganze Zahl kann angesehen werden, als ein Product aus zwey Zahlen, die Factoren heissen. Ein Product überhaupt entsteht, wenn der eine Factor so vielmahl genommen wird, als der andere Factor die Zahl

eins enthält. Nun macht das Enthalten der Zahl 1 die Grösse einer ganzen Zahl aus. Folglich muß bei dem Entstehen eines Products das Vielmahlnehmen des einen Factors mit der Grösse des andern Factors gleich seyn. (Es sey z. B. das Product = p, der eine Faktor = m, der andere = n so ist p = mn, m wird also n mahl genommen, und n, wird m mahl genommen, also ist im ersten Fall das Vielmahlnehmen = n, dem 2ten Factor, und im zweyten Fall das Vielmahlnehmen = m, dem ersten Factor.) Sind nun die beyden Factoren einander gleich, so entsteht (γιγνεται) das Product, wenn der eine gleiche Factor, (ισος) mit seiner Grösse gleich oft (ισακις) genommen wird, d. h. das Product entsteht, wenn der eine Factor so oft genommen wird, als er selbst die Zahl 1 enthält. So ist der Ausdruck erklärt: *αριθμος ισος ισακις γιγνεται.*

Sind die beyden Factoren ungleich, so kann das Product auf doppelte Art entstehen. Entweder man nimmt den grössern Factor so oft,

als

als der kleinere die Zahl 1 enthält, oder man nimmt den kleinern Factor so oft als der grössere die Zahl 1 enthält. Ein solches Product entsteht also (γιγνεται) wenn entweder der grössere Factor (πλειων) wenigeremahl (ελαττονακις) als seine Grösse beträgt, genommen wird, oder wenn der kleinere Factor (ελαττων) mehreremahl als er groß ist, (πλεονακις) genommen wird. Das ist die Erklärung des Ausdrucks: αριθμος η πλειων ελαττονακις, η ελαττων πλεονακις γιγνεται.

Es ist bekannt, daß der Factor einer Zahl, bey den ältern Mathematikern πλευρα, die Seite der Zahl heißt. Sind nun die Factoren ungleich, so kann ein Product, das eine ganze Zahl ist, auch dann entstehen, wenn der eine Factor keine ganze Zahl ist, oder wenn auch beyde Factoren keine ganze Zahlen sind. Z. B. Die Zahl 7 1/2, wenn sie 2 mahl genommen wird, giebt die Zahl 15. Sehen wir nun wie oft der Factor 7 1/2 im Product 15 enthalten ist, so finden wir, ge-

nau

nau 2 mahl. Dieses heißt, das Product 15 wird von dem Factor 7 1/2 gemessen, im Gegentheil der Factor 2 ist in 15 nicht genau etliche mahl enthalten, d. h. die Zahl 15 wird von dem Factor 2 nicht gemessen. Zerlegt man nun ein Product (Z. E. 12) nur in Factoren, die ganze Zahlen sind, (Z. E. 2 und 6, oder 3 und 4) so wird das Product von dem grössern und kleinern Factor gemessen. Will man also andeuten, man habe eine ganze Zahl in ihre Factoren zerlegt, man habe aber das Zerlegen so angestellt, daß die Factoren ganze Zahlen sind, so kann man sagen, die grössere und kleinere Seite (Factor) mißt immer genau die Zahl, (μειζων και ελαττων αει πλευρα αριθμον περιλαμβανει.)

Die Ausdrücke im Text: πας ὁς αδυνατος ισος —— περιλαμβανει, enthalten also nichts, als die Beschreibung einer ganzen Zahl, die keine Quadratzahl ist, daß sich nehmlich jede solche Zahl, zwar nur in ungleiche Factoren zerlegen läßt, daß aber unter

die-

diesen Factoren, allemahl wenigstens zwey ganze Zahlen seyn müssen.

Der Ausdruck: τον αριθμον παντα διχα διελαβομεν — wir zerlegten die Zahl in 2 Theile, so vielmal es geschehen konnte, — bezieht sich auf die Zerlegung einer ganzen Zahl in ihre möglichen Factoren, in so fern diese ganze Zahlen seyn sollen.

Die Lesart: τον μεν δυναμενον — statt der gewöhnlichen το μεν δυναμενον, habe ich ihrer Richtigkeit wegen, ohne Bedenken in den Text aufgenommen.

τον τοινυν μεταξυ τουτων, — so muß es wohl heissen, statt μεταξυ τουτου, denn dieses leztere giebt keinen Sinn.

δυναμις bedeutet eine gerade Linie, durch die eine Irrationalzahl, deren Quadrat eine ganze Zahl ist, dargestellt wird, z. E. wenn a eine unvollkommne Quadratzahl bedeutet, so heißt die gerade Linie, welche in Beziehung auf die angenommene Einheit $= \sqrt{a}$ ist, δυνα-

μις. Von dieser Bedeutung des Worts, δυναμις, die so sehr von der jetzigen Bedeutung, des Worts: Potenz, verschieden ist, so wie auch von der Bedeutung der Worte: μηκει, μηκος, μηκει ξυμμετρος, τοις επιπεδοις ξυμμετροι, und dergleichen, handelt der mathematische Commentar.

Mathematischer Commentar,

enthält

eine Theorie der Potenzen,

in so fern sie zur Erklärung der Stelle im Theätet nothwendig ist.

Es seyen zwey gerade Linien, (Fig. 1.) nehmlich A und B. Gesetzt nun, man wollte untersuchen, wie oft A in B enthalten wäre, so heißt dieß, die Linie B mit der Linie A messen, fände man nun, daß A in B einmahl, oder genau etliche mahl enthalten wäre, so ist A das Maas der Linie B. Ist z. E. A 3mahl in B enthalten, so ist B 3mahl so groß als A, oder es verhält sich A zu B, wie 1 zu 3. Gesetzt aber, A wäre nicht genau in B enthalten, d. h. B liesse sich nicht von A messen, so giebt es entweder eine andere Linie womit sich A und B gemeinschaftlich messen lassen, oder es giebt keine solche Linie.

Wir wollen annehmen, C sey eine solche Linie, mit der sich A und B messen lassen, so heißt C das gemeinschaftliche Maas von A und B. Z. E. Wenn C in A zweymahl und in B fünfmahl enthalten ist, so wird C das gemeinschaftliche Maas als 1 be-

trach-

trachtet, und A verhält sich zu B, wie die Zahl 2 zur Zahl 5.

Zwey Linien nun, von denen entweder eine die andere mißt, oder die wenigstens ein gemeinschäftliches Maas haben, heissen commensurable Linien. (γεαμμαι ξυμμετροι)

Wenn aber zwey Linien A und B kein gemeinschäftliches Maas haben, (d. h. wenn sich B von keiner Linie, die ein aliquoter Theil von A ist, so klein sie auch angenommen werden mag, messen läßt,) so heissen A und B incommensurable Linien.

Das Maas muß übrigens mit den auszumessenden Grössen gleichartig seyn, bey Linien ist es eine Linie, bey Flächen eine Fläche ꝛc. Bey Flächen nimmt man ein Quadrat von willkührlicher Grösse zum Maas an.

Zwey Flächen heissen commensurabel, wenn sie sich beyde mit dem nehmlichen Quadrat messen lassen.

Zwey Flächen heissen incommensurabel, wenn sich kein Quadrat angeben

läßt,

läßt, so klein es auch seyn mag, mit dem die Flächen gemeinschaftlich gemessen werden können.

Der 1. Satz.

Commensurable Grössen verhalten sich wie ganze Zahlen zu einander.

Die Grössen seyen A und B. Da sie commensurabel sind, so haben sie ein gemeinschaftliches Maas, dieses sey C. Nun sey C in A m mahl enthalten, und in B n mahl, so sind m und n ganze Zahlen, und C ist in A so oft enthalten als die Zahl 1 in der Zahl m, und in B ist C so oft enthalten, als die Zahl 1 in der Zahl n. Folglich verhält sich A zu C wie m zu 1 und B zu C wie n zu 1, also verhält sich A zu B wie m zu n. Nun sind m und n ganze Zahlen, und A und B commensurable Grössen, also verhalten sich commensurable Grössen wie ganze Zahlen.

Der 2. Satz.

Grössen, die sich wie ganze Zahlen zu einander verhalten, sind commensurabel.

Die Grössen seyen A und B. Die ganzen Zahlen seyen m und n, und es verhalte sich A zu B wie m zu n, so giebt es eine Grösse C die in A so oft enthalten ist, als 1 in m, und die in B so oft enthalten ist, als 1 in n. Diese Grösse C ist also das gemeinschäftliche Maas von A und B, folglich sind A und B commensurabel.

Der 3. Satz.

Incommensurable Grössen verhalten sich nicht wie Zahlen zu einander.

1) Nicht wie ganze Zahlen, denn sonst wären sie commensurabel, (2. Satz) gegen das Angenommene.

2) Nicht wie gebrochne Zahlen, denn jedes Verhältniß, in welchem die Glieder Brüche sind, läßt sich in ein Verhältniß von ganzen Zahlen verwandeln.

Der

Der 4. Satz.

Grössen, die sich nicht wie Zahlen zu einander verhalten, sind incommensurabel.

Denn wären sie commensurabel, so verhielten sie sich wie Zahlen. (1. Satz.)

Der 5. Satz.

Wenn gerade Linien commensurabel sind, so verhalten sich die auf diesen Linien beschriebnen Quadrate, wie Quadratzahlen.

Eine ganze Zahl, die ein Product ist, aus 2 gleichen Factoren, welche auch ganze Zahlen sind, heiße eine Quadratzahl. Nun seyen A und B commensurable Linien, ihr gemeinschäftliches Maas sey C. Es sey ferner C in A m mahl enthalten, und in B n mahl, so sind m und n ganze Zahlen. Man beschreibe ein Quadrat auf der Linie A, eines auf der Linie B, und eines auf dem Maas C, so ist das Quadrat von C im Quadrat A, m mahl m enthalten, und in dem Quadrat von B, n mahl n. Also verhält sich das Quadrat

drat von A zum Quadrat von B, wie m mahl m zu n mahl n. Es sind aber m mahl m und n mahl n Producte aus gleichen Factoren, d. h. Quadratzahlen, also verhalten sich die Quadrate der Linien A und B wie Quadratzahlen.

Der 6. Satz.

Wenn Quadrate sich wie Quadratzahlen verhalten, so ist die Seite des einen Quadrats mit der Seite des andern Quadrats commensurabel.

Es seyen 2 Quadrate, das eine sey auf der Linie A beschrieben, das andere auf der Linie B, und es verhalte sich das erste zum zweyten, wie die Quadratzahl m^2 zur Quadratzahl n^2, so verhält sich die Seite A zur Seite B, wie der gleiche Factoren m zum gleichen Factor n. Nun sind aber, nach der Annahme m^2 und n^2 Quadratzahlen, folglich sind die Factoren m und n ganze Zahlen. Also verhalten sich die Seiten A und B wie ganze Zahlen und sind daher commensurabel. (2. Satz.)

An-

Anmerk. Verhielten sich die 2 Quadrate wie die Zahlen u und t, so daß nehmlich u und t keine Quadratzahlen wären, aber doch das Verhältnis u: t, dem Verhältnis zweyer Quadratzahlen, $m^2 : n^2$ gleich sey, so sind wiederum die Seiten A und B commensurabel. — Denn da nach der Annahme $u : t = m^2 : n^2$, so ist $\sqrt{u} : \sqrt{t} = m : n$. Nun verhalten sich die Seiten der Quadrate wie $\sqrt{u} : \sqrt{t}$, also wie $m : n$, das heißt, wie ganze Zahlen, folglich sind sie commensurabel. (2. Satz.) Z. E. Es verhalte sich das Quadrat von A zum Quadrat von B wie 12 zu 27, so sind diese beyden Zahlen zwar keine Quadratzahlen, aber sie verhalten sich doch wie die Quadratzahlen 4 und 9, also verhalten sich die Seiten A und B wie die ganzen Zahlen 2 und 3, und sind folglich commensurabel.

Der 7. Satz.

Wenn gerade Linien incommensurabel sind, so verhalten sich die auf diesen Linien beschriebenen Quadrate nicht wie Quadratzahlen.

Denn verhielten sich die Quadrate wie Quadratzahlen, so wäre die Seite des einen Quadrats mit der Seite des andern commensurabel, (6. Satz.) gegen das Angenommene.

Der 8. Satz.

Wenn Quadrate sich nicht wie Quadratzahlen verhalten, so ist die Seite des einen Quadrats mit der Seite des andern Quadrats incommensurabel.

Denn wäre die Seite des einen Quadrats mit der Seite des andern commensurabel, so verhielten sich die Quadrate dieser Seiten wie Quadratzahlen (5. Satz) gegen das Angenommene.

Erklärungen.

1) Wenn gerade Linien commensurabel sind, so heißt dieß, sie sind in Länge commensurabel.

2)

2) Wenn gerade Linien incommensurabel sind, so heißt dieß, sie sind in Länge incommensurabel.

3) Wenn auf geraden Linien Quadrate beschrieben sind, und es sind diese Quadrate commensurabel, so sagt man: die geraden Linien sind im Quadrat commensurabel.

4) Wenn die Quadrate gerader Linien nicht commensurabel sind, so heißt dieß, die geraden Linien sind im Quadrast incommensurabel.

Der 9. Satz.

Wenn Linien in Länge commensurabel sind, so sind sie auch im Quadrat commensurabel.

Denn wenn Linien in Länge commensurabel sind, so verhalten sich ihre Quadrate wie Quadratzahlen, (5. Satz.) also sind diese Quadrate commensurabel, (2. Satz.) folglich sind die Linien im Quadrat commensurabel. (3. Erkl.)

Der 10. Satz.

Wenn Linien im Quadrat commensurabel sind, so sind sie deßwegen nicht immer in Länge commensurabel.

Wenn Linien im Quadrat commensurabel sind, so verhalten sich die Quadrate dieser Linien wie ganze Zahlen. (1. Satz.) Aber nun sind diese Zahlen entweder Quadratzahlen, oder es sind keine. Sind sie Quadratzahlen, so sind die Linien auch in Länge commensurabel, (6. Satz.) sind sie keine Quadratzahlen, so können sie sich doch öfters wie Quadratzahlen verhalten, und dann sind die Linien wieder in Länge commensurabel, (6. Satz. Anmerk.) sind sie aber keine Quadratzahlen, und verhalten sich auch nicht wie Quadratzahlen, so sind die Linien in Länge incommensurabel. (8. Satz.)

Der 11. Satz.

Wenn Linien im Quadrat incommensurabel sind, so sind sie auch in Länge incommensurabel.

Denn wären sie in Länge commensurabel, so müßten sie auch im Quadrat commen-

mensurabel seyn, (9. Satz.) gegen das Angenommene.

Der 12. Satz.

Wenn Linien in Länge incommensurabel sind, so sind sie deßwegen nicht immer auch im Quadrat incommensurabel.

Denn es giebt Linien, die in Länge incommensurabel, und doch im Quadrat commensurabel sind.

Es sey z. E. ein Quadrat a b d c (Fig. 2.) und man ziehe die Diagonale b c so läßt sich erweisen, daß die Diagonale mit der Seite des Quadrats in Länge incommensurabel aber im Quadrat commensurabel sey.

Denn das Quadrat der Diagonale ist nach dem pythagorischen Lehrsatz so groß als das zweyfache Quadrat der Seite a b. Folglich sind diese Quadrate commensurabel, d. h. es sind die Linien a b und c b im Quadrat commensurabel und das Quadrat der Seite a b verhält sich zum Quadrat der Diagonale c b wie 1 zu 2. Diese Zahlen verhalten sich aber nicht wie Quadratzahlen, also (8 Satz.) sind a b und c b in Länge incommensurabel.

Der

Der 13. Satz.

Es läßt sich zeigen, daß mit einer angenommenen Linie unzählich andere theils in Länge und Quadrat commensurabel, theils in Länge incommensurabel und doch im Quadrat commensurabel sind.

Die angenommene Linie sey a b (3. Fig.) man ziehe Linien von unbestimmter Länge, so viel man will, z. E. c d, e f &c. und trage auf jede dieser Linien ein Vielfaches von a b auf, so daß z. E. c h gleich 4 a b, und e g gleich 3 a b sey, so ist jede dieser Linien mit der angenommenen Linie a b in Länge commensurabel, und folglich sind sie auch mit ihr im Quadrat commensurabel. (9. Satz.)

Wenn man aber (4. Fig.) die angenommene Linie a b, und die Linie c h oder e g, oder überhaupt eine Linie a c die ein Vielfaches von a b ist unter einem rechten Winkel mit ihr verbindet, und die Linie b c zieht, so ist diese mit a b in Länge incommensurabel, und doch im Quadrat commensurabel. Denn b a c ist ein rechtwinklichtes Dreyeck, also ist

das

das Quadrat der b c den Quadraten der a b und a c gleich. Nun ist angenommen worden daß a c ein Vielfaches der a b sey. Setzen wir a b = 1 und nennen das Vielfache m, so ist a c = m, also das Quadrat der a c gleich m mahl m, oder m^2 und das Quadrat von a b = 1, nun diese beyden Quadrate zusammen sind = $m^2 + 1$. Folglich ist das Quadrat der b c = $m^2 + 1$. Dieser Ausdruck ist eine ganze Zahl, aber keine Quadratzahl. (Denn m^2 ist eine Quadratzahl, wäre nun $m^2 + 1$ auch eine Quadratzahl, so würde es Quadratzahlen geben, deren Unterschied 1 wäre, dieß ist aber unmöglich.) Nun verhält sich das Quadrat der b c zu dem der a b, wie $m^2 + 1$ zu 1. Also sind b c und a b im Quadrat commensurabel, (3. Erkl. und 2 Satz.) aber in Länge incommensurabel, weil sich $m^2 + 1$ und 1 nicht wie Quadratzahlen verhalten. (10 Satz.)

Erklärungen.

5) Wenn irgend eine Linie angenommen wird, so heisse die Linie, die in Länge ein Vielfaches der angenommenen Linie ist, oder von der die angenommene Linie das Maas ist, ei-

ne Rationallinie, und die angenommene Linie heisse in dieser Rücksicht, die erste Rationallinie.

6) Eine Linie, die mit der angenommenen Linie nicht in Länge commensurabel, aber im Quadrat das Vielfache von ihr ist, heisse Potenz. (δυναμις) und die angenommene Linie heisse in Beziehung auf Potenzen, die einfache Potenz.

7) Eine Potenz, die im Quadrat das doppelte der einfachen Potenz ist, heisse die zweifache Potenz, ist sie im Quadrat das dreyfache der einfachen Potenz, so heisse sie die dreyfache Potenz, (δυναμις τριπους) ist sie das fünffache, so heisse sie die fünffache Potenz, (δυναμις πεντεπους) u. s. f.

Anmerkung. Eine Potenz muß also 1) im Quadrat das Vielfache der angenommenen Linie seyn, d. h. die angenommene Linie muß im Quadrat das Maas der Potenz seyn, durch diese Einschränkung unterscheidet sich die Potenz von den im Quadrat commensurabeln Linien überhaupt.

2) muß

2) muß aber die Potenz mit der angenommenen Linie in Länge incommensurabel seyn. Dadurch unterscheidet sie sich von den Rationallinien.

3) Welches Vielfache aber die Potenzen seyn können, ist noch unbestimmt.

14 Satz.

Wenn sich zwei Linien im Quadrat zu einander verhalten, wie die Zahl 1 zu einer ganzen Zahl, die keine Quadratzahl ist, so sind sie Potenzen, und die kleinere Linie ist die einfache Potenz, die grössere eine vielfache Potenz.

Denn wenn sich die Linien im Quadrat verhalten wie ganze Zahlen, so sind sie 1) im Quadrat commensurabel, wenn sich aber die eine zur andern im Quadrat verhält wie die Zahl 1 zu irgend einer ganzen Zahl, so ist 2) die eine zugleich im Quadrat das Maas der andern, wenn aber in diesem Verhältniß die eine Zahl 1; d. h. eine Quadratzahl und die andere keine Quadratzahl ist, so verhalten sich 3) die Linien im Quadrat nicht wie Quadrat

Zah-

Zahlen, folglich sind sie in Länge incommensurabel. (10 Satz.) Daher sind sie Potenzen, (6 Erk.) und zwar die kleinere dieser Linien die einfache, die grösere aber die 2 fache oder 3 fache oder 5 fache Potenz ꝛc. (7 Erkl.)

15. Satz. Aufgabe.

Die Potenzen nach der Reihe zu finden.

Man nehme eine Linie C von beliebiger Länge als einfache Potenz an. Nehme nach der natürlichen Ordnung die Zahlen, die keine Quadratzahlen sind, als 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, u. s. w.

Ziehe ebensoviel gerade Linien, die in Länge das 2 fache, 3 fache, 5 fache ꝛc. von der angenommenen Linie, als Rationallinie betrachtet, sind. (5 Erklärung.)

Suche zwischen der angenommenen Linie und ieder dieser Rationallinien, geometrisch die mittlere Proportionallinie. (Euclid. 6 B. 13 S.)

Diese mittlern Proportionallinien geben nach der Ordnung, die 2 fache, 3 fache, 5 fache, 6 fache, 7 fache ꝛc. Potenz.

Denn

Denn wenn man auf diesen mittlern Proportionallinien Quadrate errichtet, und eins auf der angenommenen Linie C, so verhält sich das Quadrat der C zu iedem dieser Quadrate, wie 1 zu einer ganzen Zahl, die keine Quadratzahl ist. (Denn man nenne die mittleren Proportionalen x und y, so verhält sich die Linie 1 zu x, wie x zu der Linie 2, und 1 zu y wie y zur Linie 3, also ist $x^2 = 2$ und $y^2 = 3$, das Quadrat von C aber ist 1, also verhält sich dieses zu x^2 wie 1 zu 2 ꝛc.) Daher sind diese mittlern Proportionallinien, Potenzen. (14 Satz.)

Wenn man eine andere Linie zum Maas annimmt, so giebt diese wieder eine Reihe Potenzen. So kann es unendlich viele Reihen Potenzen geben, von der aber iede durch die angenommene Linie bestimmt wird. Eine solche bestimmte Reihe heisse: ein System von Potenzen.

Anmerkung. Hat man die Zahlen, die keine Quadratzahlen sind, (die ich der Kürze wegen Nichtquadratzahlen nennen will) nach der natürlichen Ordnung der ganzen

Zah-

Zahlen gefunden, so sieht man, wie das Vielfache der Potenzen steigt.

Es giebt also keine vierfache, keine neunfache Potenz, sondern dieß sind Rationallinien.

Classification
des bishergesagten

Es giebt.

I. Rationalgrössen.

1) Grössen in die Länge und im Quadrat commensurabel sind.

a) Grössen, die in Länge und Quadrat das Vielfache von einer angenommenen Grösse sind. (Rationalinien.)

2) Grössen, die in Länge incommensurabel aber im Quadrat commensurabel sind.

a) Grössen, die mit einer angenommenen in Länge incommensurabel, aber im Quadrat das Vielfache von ihr sind. (Potenzen)

II. Ir-

II. Irrationalgrössen.

Grössen, die in Länge und Quadrat incommensurabel sind.

Die Ordnung der Rationallinien und Potenzen ist folgende.

Zahlen	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Potenzen	die 1f.	die 2f.	die 3f.	vacat	die 5f.	die 6te	die 7f.	die 8f.	vacat
Die Anzahl der Potenzen	die erste	die 2te	die 3te	vacat	die 4te	die 5te	die 6te	die 7te	vacat
Rationallin.	die erste	vacat	vacat	die 2te	vacat	vac.	vac.	vac	die 3te

Anwendung auf Plato's mathematische Stelle.

Die alten Mathematiker mußten bald nach Erfindung des pythagorischen Lehrsatzes auf den Unterschied der Rationalgrössen und Irrationalgrößen aufmerksam werden. Die erstern die commensurabel seyn können, (δυνανται) hießen sie deswegen überhaupt δυναμεις, im Gegensatz der Irrationalgrössen, die nicht com-

commensurabel seyn können. In der Folge bemerkten sie, daß viele von den Rationalgrößen mit einander nur im Quadrat commensurabel seyn können, in Länge aber nicht, (13 Satz) sie untersuchten also diese Art der δυναμεων genauer. Sie legten dabey die nach der natürlichen Ordnung folgenden ganzen Zahlen zum Grund, nahmen eine Linie als Einheit an, (ποδιαια δυναμις) giengen nun die δυναμεις nach dem Verhältnis, welches ihre Quadrate zu dem Quadrat der Einheit in ganzen Zahlen hatten, einzeln nach der Reihe der ganzen Zahlen durch, und bewiesen, daß diejenigen δυναμεις, deren Quadrate sich zum Quadrat der als Einheit angenommenen Linie verhalten, wie 2 zu 1, 3 zu 1, 5 zu 1, u. s. w. mit der angenommenen Linie in Länge incommensurabel sind, (μήκει οὐ ξύμμετροι τῇ ποδιαια) vermuthlich nach der Art, wie Euclid die Incommensurabilität in Länge, des im Quadrat zweyfachen darthut. (10 Buch. 117 Satz in seinen Elementen.) Diesen Entzweck hatte nun, nach der Fiction des Plato, auch der Aufsatz, den Theodor seinen Schülern mittheil-

theilte. Er bewieß darinnen, daß die drey-füßige und fünffüßige δυναμις mit der einfußigen (ποδιαια) in Länge incommensurabel sey, das heißt, daß die Linien, deren Quadrate, das dreyfache und fünffache von dem Quadrat der angenommenen Linie sind, mit dieser angenommenen Linie incommensurabel sind. Nun läßt sich gleichfalls darthun, daß im Gegentheil die Linien, deren Quadrate, das vierfache, neunfache, sechszehnfache, von dem Quadrat der angenommenen Linie sind, mit dieser Linie commensurabel sind. So giebt dieß also zwey verschiedene Arten von Linien, wovon die einen nur im Quadrat, die andern aber in Länge und Quadrat mit der angenommenen Linie commensurabel sind, allein weil doch beyden Commensurabilität zukommt, begrif man sie unter dem gemeinschaftlichen Namen: δυναμεις.

Theätet kam nun auf den Gedanken, eine logische Partition zu versuchen, und diese beyden Arten von Linien, nach ihren specifischen Unterschied, in Beziehung auf die zwey Classen von ganzen Zahlen, (Quadrat und Nichtquadratzahlen) zu definiren. Er bemerkte nehmlich,

lich, daß die von seinem Lehrer angegebnen Linien, die in Länge mit der Einheit incommensurabel sind, im Quadrat mit der Einheit in einem solchen Verhältnis stünden, wie ganze Zahlen, die keine Quadratzahlen sind, zu der Zahl Eins, und schlos, daß die Linien die im Quadrat zur Einheit sich verhalten, wie Quadratzahlen zur Zahl Eins, eine den erstern Linien entgegen gesetzte Eigenschaft hätten. Er verglich also die beyden Arten Zahlen mit gewissen geometrischen Figuren, und fand auf diesem Weg Defimitionen der Potenzen und Rationallinien die mit denen die ich gegeben habe, (5 und 6 Erkl.) den Worten nach zwar verschieden, aber dem Sinn nach einerley sind, wie ich bald zeigen werde. Vorher aber will ich die Methode des Theätets ausführlich angeben.

Jede vorkommende ganze Zahl kann angesehen werden, als wäre sie aus irgend ein paar ganzen Zahlen durch die Multiplication entstanden, oder jede ganze Zahl kann als ein Product zweyer Zahlen, die Factoren heissen, betrachtet werden. Wenn man nun eine gegebene ganze Zahl in ihre Factoren zerlegt,

so

so wird man entweder darunter ein paar gleiche Factoren oder lauter ungleiche Factoren antreffen. Ist das erste, (z. E bey der Zahl 9 die gleich 3 mahl 3 ist) so ziehe man (Fig. 5) eine beliebige Linie C welche die Zahl 1 repräsentiren soll, (sie soll nehmlich das Maas gewisser Linien seyn, so wie die Zahl 1 das Maas ieder ganzen Zahl ist) ferner ziehe man eine andere Linie und trage das Maas C so oft auf sie, als der gleiche Factor die Zahl 1 enthält (in unsern Fall 3 mahl.) Diese Linie sey a b, auf ihr beschreibe man das Quadrat a b c d, so ist a b die Seite dieses Quadrats. Nun beschreibe man auf dem Maas C ebenfalls ein Quadrat A, so wird das Quadrat A in dem Quadrat a b c d so oft enthalten seyn, als die Zahl 1 in der gegebenen Zahl enthalten ist, (in unserm Fall 9 mahl,) oder das Quadrat a b c d wird von dem Quadrat A eben so gemessen, wie die gegebene Zahl, von der Zahl 1. Das Quadrat a b c d repräsentirt also die gegebne Zahl, und die Seite des Quadrats den gleichen Factor der gegebenen Zahl. Man heißt daher das Quadrat das Schema der gegebenen

Zahl, und die Seite des Quadrats das Schema des gleichen Factors. Die Zahl selbst aber, und ihr gleicher Factor ist schematisirt, iene als Quadrat, dieser als Seite des Quadrats. Man heißt daher eine Zahl die gleiche Factoren hat, eine Quadratzahl und den gleichen Factor die Seite (πλευρα) der Zahl, indem man die Eigenschaften des Schema auf die schematisirte Zahl überträgt, und will man das Uebertragen noch weiter treiben, wie Theätet thut, so kann man die Quadratzahl, eine viereckigte und gleichseitige Flächen Zahl nennen, (τετραγωνον, ισοπλευρον και ἐπιπεδον αριθμον)

Wenn man aber bey der Zerfällung einer ganzen Zahl in ihre Factoren, findet, daß sie lauter ungleiche Factoren hat, (Z. E. die Zahl 12) so nehme man wieder eine Linie C als Maas an, (6 Figur) und ziehe zwey gerade Linien a b und c d, wovon die kleinere das Maas C so oft enthält, als der kleinere Factor die Zahl 1, und die grössere das Maas C so oft, als der grössere Factor die Zahl 1. (In unserm Beyspiel ist 12 gleich 2 mahl 6, also enthält a b das

Maas

Maaß C 2 mahl und c d es 6 mahl.) Sodann beschreibe man aus den Linien a b und c d das Rectangel a b c d (Fig. 7) und auf der Linie C das Quadrat A, so enthält das Rectangel a b c d das Quadrat A so oft, als die gegebne Zahl die Quadratzahl 1 enthält, (in unserm Beyspiel 12 mahl,) die längere Seite des Rectangels enthält das Maaß C in Länge so oft, als der grössere Factor die Zahl 1, und die kürzere Seite das Maaß C in Länge so oft, als der kleinere Factor die Zahl 1 enthält. So wird eine Nichtquadratzahl als Rectangel, und ihre ungleichen Factoren als die ungleichen Seiten des Rectangels schematisirt. Man kann also eine Nichtquadratzahl, in Beziehung auf dieses Schema, eine länglichte Zahl (προμήκη αριθμον) und ihre ungleichen Factoren die Seiten der länglichten Zahl, nennen.

Beschreibt man nun (nach dem 14 Satz des 2 Buchs in Euclids Elementen) ein Quadrat, das so groß ist, als das Rectangel a b c d, so enthält dieses Quadrat, das Quadrat-

maas A eben so oft, als das Rectangel es enthält, es ist also dieses Quadrat gleichfalls das Schema der gegebnen Zahl, und auf diese Art wird die Nichtquadratzahl als Quadrat schematisirt.

Nun nennt Theätet die Seite des Quadrats, welches das Schema einer Quadratzahl ist, eine Rationallinie, eine Längenlinie (μῆκος). Aber die Seite des Quadrats, welches das Schema einer Nichtquadratzahl ist, nennt er Potenz. (δυναμις)

Daß diese Definition der Rationallinie, mit der, welche ich in der 5ten Erklärung gegeben habe, einerley sey, ist leicht einzusehen, denn die Seite des Quadrats, welches das Schema einer Quadratzahl ist, ist ja das Vielfache des Maases C.

Aber daß das, was Theätet eine Potenz nennt, auch eine Potenz nach der in der 6ten Erklärung gegebnen Bedeutung des Worts sey, soll erwiesen werden.

Der

Der 16. Satz.

Die Seite des Quadrats, welches das Schema einer Nichtquadratzahl ist, ist mit der angenommenen Linie C in Länge incommensurabel aber im Quadrat ein Vielfaches derselben.

Die Seite des Quadrats, welches das Schema der Nichtquadratzahl ist, heisse B. Nun verhalten sich C und B im Quadrat nicht wie Quadratzahlen, also sind sie in Länge incommensurabel (der 8. und 10. Satz). Ferner verhält sich C zu B im Quadrat, wie die Zahl 1 zu einer ganzen Zahl. Jede ganze Zahl ist aber ein Vielfaches der Zahl 1, also ist das Quadrat der B ein Vielfaches des Quadrats der C, das heist, B ist im Quadrat ein Vielfaches der C.

Der 17. Satz.

Die Seite des Quadrats, welches das Schema einer Nichtquadratzahl ist, ist eine Potenz.

Denn sie ist mit einer angenommenen Linie in Länge incommensurabel, aber im

Qua-

Quadrat ein Vielfaches von ihr, (16. Satz) also ist sie eine Potenz. (6. Erklärung.)

Folglich gilt alles, was wir oben von den Potenzen behauptet haben, auch von den Seiten der Quadrate, welche Schemata der Nichtquadratzahlen sind.

Der 18. Satz.

Alle Potenzen des nehmlichen Systems sind im Quadrat miteinander commensurabel, aber in Länge theils commensurabel theils incommensurabel.

Alle Potenzen des nehmlichen Systems sind im Quadrat das Vielfache der angenommenen einfachen Potenz, daher mit ihr im Quadrat commensurabel, also auch mit einander im Quadrat commensurabel.

Wenn nun zwey Potenzen sich im Quadrat verhalten, wie Quadratzahlen, (z. B. 12 zu 27 verhält sich wie 4 zu 9) so sind sie auch in Länge commensurabel. (6 und 10. Satz).

Wenn sich aber zwey Potenzen im Quadrat nicht zu einander verhalten, wie Quadratzahlen, so sind sie in Länge incommensurabel. (8 und 10. Satz.)

Der 19. Satz.

Wenn zwey Grössen B und C mit einer Dritten A commensurabel sind, so sind sie selbst commensurabel.

Da B und C mit A commensurabel sind, so verhalten sie sich zu A wie ganze Zahlen, (1. Satz.) es verhalte sich

also B zu A wie m zu n
und A zu C wie p zu r

---

so verhält sich auch B zu C wie mp zu nr: aber mp und nr sind Producte aus ganzen Zahlen, also selbst ganze Zahlen, folglich verhalten sich B und C wie ganze Zahlen, daher sind sie commensurabel. (2. Satz.)

Der 20. Satz.

Zwey Grössen, A und B, von denen die eine mit einer Dritten C commensurabel, die andere aber mit eben dieser C incommensurabel ist, sind selbst mit einander incommensurabel.

C ist commensurabel mit A, wäre nun B auch commensurabel mit A, so wäre C commensurabel mit B, (19 S.) gegen das Angenommene.

Der 21. Satz.

Die Potenzen sind mit den Rationallinien des nehmlichen Systems in Länge incommensurabel, aber im Quadrat commensurabel. (δυνάμεις μήκει μὲν οὐ ξυμμέτροι εἰσὶ ταῖς γραμμαῖς ἃς μῆκος ωρισάμεθα, τοῖς δ' ἐπιπέδοις δύνανται)

Jede Rationallinie ist ein Vielfaches von einer als erste Rationallinie angenommenen Linie C, also ist sie mit dieser in Länge commensurabel.

Jede Potenz des nehmlichen Systems aber, ist mit eben dieser angenommenen Linie C (als der einfachen Potenz,) in Länge incommensurabel, (6. Erkl, und 14. S.)

Also ist jede Potenz mit jeder Rationallinie von dem nehmlichen System in Länge incommensurabel, (20 S.) ausser die einfache Potenz und die erste Rationallinie, sind einerley.

Aber im Quadrat verhalten sich die Rationallinien zu den Potenzen wie ganze Zahlen, folglich ist jede Potenz mit jeder Rationallinie im Quadrat commensurabel. (2. Satz).

Anmerkung.

In der neuern Mathematik heißt Potenz, jedes Product, das aus gleichen Factoren besteht, und der gleiche Factor heißt die Wurzel der Potenz.

Da nun jede Zahl als ein Product aus 2 gleichen Factoren angesehen werden kann, so kann, in so fern jede Zahl eine Quadratzahl heissen. Ist die Wurzel der Quadratzahl eine ganze Zahl, so heißt sie eine vollkommene Quadratzahl, aber eine unvollkommene Quadratzahl, wenn die Wurzel eine Irrationalzahl ist. Nach dieser neuern mathematischen Terminologie, könnte man die Definition der Potenzen, (in dem Sinn wie die Alten dieses Wort gebrauchten,) so ausdrücken: Potenz ist die Wurzel einer unvollkommenen Quadratzahl, als eine gerade Linie dargestellt, und eine Potenz finden, würde heissen: Die Wurzel einer unvollkommenen Quadratzahl in einer geraden Linie darstellen. Die Wurzeln der vollkommnen Quadratzahlen aber als gerade Linien dargestellt, würden Rationallinien heissen.

Nun

Nun wieder zu unserm Theätet. Socrates hatte ihn aufgefordert zu sagen, was Wissenschaft sey? Er antwortete: die Geometrie, die Musik, u. d. gl. seyen Wissenschaften. Socrates tadelte diese Antwort, weil sie nicht das enthalte, was er zu wissen verlange. Es sey nehmlich nicht zu bestimmen, welche Obiecte unter den Begrif der Wissenschaft gehören, sondern es sey ein Prädicat zu finden, welches der Wissenschaft als Subject betrachtet, zukomme, und welches den Grund enthält, warum man diese einzelnen Obiecte unter den Begriff Wissenschaft subsumirt. Dem Theätet war die Sache noch nicht ganz deutlich, doch fiel ihm etwas ähnliches ein. Er erinnerte sich an den Aufsatz seines Lehrers, worinn dieser bewiesen hatte, daß die dreyfache und fünffache Potenz mit der einfachen in Länge incommensurabel sey. Nun dachte er sich die Frage: Was ist eine Potenz? Die Antwort fand er in der Beweisart seines Lehrers: dieser hatte gezeigt, daß diese Linien mit der angenommenen Einheit in Länge incommensurabel seyen. Nun schloß er: jede Linie, welche die Wurzel einer Zahl dar-

stellt,

stellt, aber mit der angenommenen Einheit incommensurabel ist, ist eine Potenz. Allein jetzt war die Frage, was sind dieß für Zahlen, deren Wurzeln mit der Einheit incommensurabel sind. Durch Nachdenken fand er, daß dieß die unvollkommenen Quadratzahlen sind. Jetzt hatte er also etwas gefunden, was allen Potenzen gemeinschäftlich ist, und wodurch sie sich zugleich von allen andern Linien unterscheiden. Indem er nun die andere Classe von Zahlen, die vollkommene Quadratzahlen sind, untersuchte, so fand er, daß ihre Wurzeln ganze Zahlen wären, folglich von der Zahl 1 gemessen würden, und daß daher die Linien, die dergleichen Wurzeln vorstellten, von der zur Einheit angenommenen Linie müßten gemeßen werden können. In Beziehung auf die Art des Messens in Länge, nennte er eine solche Linie, eine Länge. Noch gab er den Zahlen selbst besondere Namen, eine vollkommne Quadratzahl, hieß er eine viereckigte gleichseitige Zahl, und eine unvollkommne Quadratzahl, eine länglichte Zahl. Da er also in diesem Verfahren, etwas ähnliches mit dem sah, was

was Socrates von ihm verlangte: nehmlich eine richtige Erklärung von irgend einem Object zu geben, so erzählte er diese Methode, um zu hören, ob sie richtig sey, und ob er auch in diesem Fall so verfahren sollte. Socrates, dem der aufkeimende Untersuchungsgeist, die emporstrebende Thätigkeit des Jünglings, und sein Wunsch um Belehrung gefiel, suchte durch grosses Lob seine Schüchternheit zu vermindern, und ihn ganz zutraulich zu machen. Er wollte ihm den Muth einflößen, irgend eine Erklärung, von dem was Wissenschaft sey, zu geben, und dann die Geisteskräfte des Jünglings noch weiter prüfen.

Die Kunst des Plato, ist auch bey dieser mathematischen Stelle zu bewundern. Die Untersuchung über die Potenzen, ist so passend für die Kenntnisse und das Alter des Theätets. Es liegt in dem was Theätet sagt, keine große Weisheit verborgen, aber was er leistete, ist für einen Jüngling gewiß lobenswerth. Er zeigt sich dabey bescheiden, ohne alle Prätension, ganz so, wie ihn sein Lehrer vorher schilderte. Auch der Vortrag ist dem Jünglingsalter angemessen, in manchen Stel-

len etwas zu umständlich, in manchen abgerissen, im Ganzen ohne gehörige Präcision. Was er zuerst ἀριθμον τετραγωνον και ισοπλευρον heißt, das nennt er bald darauf ισοπλευρου και επιπεδον ἀριθμον, was er vorher προμηκη ἀριθμον nannte, heißt er gleich darauf τον ετερομηκη. Der Zusatz ὡς μηκει μεν — bis δυναται ist überflüssig, denn er drückt zwar eine Eigenschaft der Potenzen aus, wie ich oben im 21. Satz gezeigt habe, aber eine Eigenschaft, die aus der Definition, die Theätet kurz vorher gab, abgeleitet werden kann, und also keinen wesentlichen Bestandtheil der Definition ausmacht.

Uibrigens liegt in dieser Stelle ein mathematischer Stoff zum Grunde, den Theodor zu bearbeiten anfieng, Theätet, oder vielmehr Plato mehr ausbildete, und den endlich Euclid in seinem zehnten Buch zu einem Meisterwerk vollendete: eine Bemerkung, die wahrscheinlich, so wie die Etymologie des Worts: δυναμεις (Potenz,) für mathematische Geschichtsforscher interessant seyn wird. Wenigstens läßt sich daraus der bey den griechischen

Ma-

Mathematikern gewöhnliche Ausdruck des pythagorischen Theorems: ἡ ὑποτείνουσα πλευρὰ ἴσον δυναται ταῖςπεριεχούσαις, (hypotenusa tantum potest, quantum ea, quae rectum continent latera) erklären. Er bedeutet nehmlich ursprünglich, daß die Hypotenuse in Rücksicht ihres Verhältnisses zum Aggregat der beiden Catheten unter die commensurabeln Grössen, (δυναμεις) gehört, und zwar so, daß wenn sie auch nicht immer in Länge mit dem Aggregat der Catheten commensurabel, dennoch allzeit im Quadrat dem Aggregat der Quadrate dieser Catheten gleich ist.

Commentar

über die

im Meno vorkommende mathematische Stelle.

Es ist ein Dreyeck a b c gegeben, (Fig. 8.) und ein Cirkel $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$ (Fig. 10.) es wird gefragt, ob dieses Dreyeck in diesen Cirkel könne eingetragen werden, d. h. ob in dem gegebenen Cirkel ein mit dem gegebenen Dreyeck congruentes Dreyeck so beschrieben werden kann, daß die Seiten desselben Sehnen des gegebenen Cirkels sind? — Wer auf diese Frage antworten will, muß bestimmen, ob dem gegebenen Dreyeck a b c das Prädicat der Congruenz, mit einem gewissen in dem gegebenen Cirkel $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$ beschriebenen Dreyeck, zukommt. — Wenn ein mathematischer Gegenstand gegeben ist, so finden überhaupt folgende zwey Fragen statt: 1) Was für Prädicate kommen dem Gegenstand zu, 2) kommt ein gewisses Prädicat dem Gegenstand zu? Zum Beyspiel: wenn ein Dreyeck als mathematischer Gegenstand gegeben ist, (d. h. wenn eine Figur, die dem logischen Begriff eines Dreyecks entspricht, in der reinen Anschauung

dargestellt wird,) so kann erstens gefragt werden, welche Prädicate kommen dem Dreyeck zu? Wer hierauf antworten will, muß das in der Einbildungskraft construirte Schema des Dreyecks überhaupt durchgehen, das Mannichfaltige desselben auffassen, oder durch gezogene Linien das Dreyeck in Theile zerlegen, und diese mit einander vergleich n, um die Prädicate zu finden, die dem Dreyeck zukommen. Es kann aber auch gefragt werden, kommt ein gewisses Prädicat dem Dreyeck zu? z. B. Sind in einem Dreyeck die drey Winkel zweyen rechten Winkeln gleich, oder sind in einem Dreyeck die drey Winkel dreyen rechten gleich, oder sind in einem Dreyeck die drey Winkel einander gleich? Wenn man hierauf antworten will, so muß man untersuchen, ob in dem construirten Begriff, das verlangte Prädicat enthalten ist, oder nicht, oder ob das Gegentheil davon darinn enthalten ist. So sind auf diese Frage dreyerley Antworten möglich. Denn wenn das verlangte Prädicat im Gegenstand enthalten ist, so ist die Antwort, allgemein bejahend. Z. B. In jedem Dreyeck sind die 3

Winkel zweyen rechten gleich. Ist das Gegentheil des verlangten Prädicats im Gegenstand enthalten, so ist die Antwort allgemein verneinend. Z. B. In keinem Dreyeck sind die 3 Winkel dreyen rechten gleich. Ist endlich das verlangte Prädicat nicht im Gegenstand enthalten, so ist die Antwort nur particulär verneinend. Z. B. Nicht in jedem Dreyeck sind die drey Winkel einander gleich. Denn wenn gleich ein gewisses Prädicat nicht im Schema der Gattung enthalten ist, so kann es doch im Schema der Art, die unter diese Gattung gehört, enthalten seyn, wie das Prädicat der Gleichheit der Winkel, in einer gewissen Art von Dreyecken, nehmlich den gleichseitigen. Hat man diese gefunden, so ist die Antwort particulär bejahend, z. B. In einer Art Dreyecke, nehmlich den gleichseitigen, sind die drey Winkel einander gleich. So ist es nun auch mit der Frage beschaffen, kann ein Dreyeck in einen Cirkel eingetragen werden? Dieses ist offenbar unmöglich, wenn die Seite eines Dreyecks grösser ist, als der Durchmesser des Cirkels, aber es ist möglich, wenn das Dreyeck rechtwinklicht, und die

Hypotenuse dem Durchmesser des Cirkels gleich ist. Hier ist also eine Bestimmung der Art des Dreyecks, eine Hypothesis, nothwendig. Soll aber diese Hypothesis richtig seyn, so muß sich der Satz in dem sie vorkommt, umkehren lassen. Z. B. Wenn wir prüfen wollen, ob die angegebne Hypothesis richtig ist, so dürfen wir nur die an sich wahren Sätze: wenn die Seite eines Dreyecks grösser ist als der Durchmesser eines Cirkels, so läßt es sich nicht in diesen Cirkel eintragen, und wenn ein Dreyeck rechtwinklicht und dessen Hyotenuse dem Durchmesser eines Cirkels gleich ist, so läßt es sich in diesen Cirkel eintragen, umkehren, und sehen, ob sie noch wahr bleiben. Also: Wenn sich ein Dreyeck nicht in einen gegebenen Cirkel eintragen läßt, so ist die eine Seite desselben grösser als der Durchmesser dieses Cirkels, und wenn sich ein Dreyeck in einen gegebenen Cirkel eintragen läßt, so ist es ein rechtwinklichtes Dreyeck, dessen Hypotenuse dem Durchmesser des Cirkels gleich ist.

Diese beiden Sätze sind falsch, und also die Hypothesis nicht richtig, das heißt:

es

es ist die Art von Dreyecken, die sich in einen gegebnen Cirkel eintragen lassen, nicht gehörig bestimmt, weil das Prädicat von weitern Umfange ist, als das Subject, folglich noch anderen Subjecten als dem in der Hypothesis angegebenen zukommen kann. Läßt sich aber der Satz umkehren, so folgt nothwendig daraus die Richtigkeit des verneinenden oder alle übrigen Arten ausschliesenden Satzes.

Wir müssen uns also nach einer andern Hypothesis umsehen, und die folgenden 4 Sätze, werden darthun, daß diejenigen Dreyecke, deren eine Seite von dem ebengedachten rechtwinklichten Dreyeck proportional geschnitten wird, durch eine richtige Hypothesis als diejenige Art aufgestellt werden, die sich in einen gegebenen Cirkel eintragen läßt.

1. Satz.

Wenn ein gegebenes Dreyeck, von dem auf einer seiner Seiten beschriebenen rechtwinklichten Dreyeck, dessen Hypotenuse dem Durchmesser des gegebenen Cirkels gleich ist, einen dem Rest ähnlichen Theil

ab=

abschneidet, so kann das gegebene Dreyeck in den gegebenen Cirkel eingetragen werden.

Erläuterung.

Das gegebene Dreyeck sey a b c (Fig. 8) und der gegebene Cirkel sey $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$ (Fig. 10.) Es sey auf der Seite a c ein rechtwinklichtes Dreyeck d a c beschrieben, dessen Hypotenuse d c dem Durchmesser des gegebenen Cirkels gleich ist, es sey ferner das Dreyeck a f d dem Dreyeck b f c ähnlich, (das heißt: der abgeschnittne Theil a f d des rechtwinklichten Dreyecks d a c sey ähnlich dem Rest b f c, des gegebenen Dreyecks a b c) so behaupte ich, das Dreyeck a b c könne in den Cirkel $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$ eingetragen werden.

Beweis.

Im rechtwinklichten Dreyeck d a c ist a c kleiner als die Hypotenuse c d, diese ist aber dem Durchmesser des Cirkels $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$ gleich, also ist a c kleiner als dieser Durchmesser, folglich läßt sie sich in den Cirkel $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$ als Sehne eintrageu. Es sey also die

Sehn

Sehne $\alpha\beta$ gleich a c, man setzte an α einen dem b a c gleichen Winkel $\beta\alpha\gamma$ und ziehe die Sehnen $\alpha\gamma$ und $\beta\gamma$, so ist $\alpha\beta\gamma$ ein in dem Cirkel beschriebenes Dreyeck.

Man ziehe ferner im Cirkel $\alpha\beta\gamma\delta$ von β aus, den Durchmesser $\beta\delta$ und die Sehne $\alpha\delta$, so ist der Winkel $\beta\alpha\delta$ im Halbcirkel, folglich das Dreyeck $\beta\alpha\delta$ ein rechtwinklichtes Dreyeck, dessen Hypotenuse der Durchmesser, und die Seite $\alpha\beta$ der Seite a c gleich ist, also congruent mit dem rechtwinklichten Dreyeck d a c, daher ist $\alpha\delta$ gleich a d und der Winkel δ gleich d.

Da nun $\beta\alpha\delta$ ein rechter Winkel und c a d gleichfalls, und der $\beta\alpha\gamma$ dem c a b gleichgemacht worden, so ist auch der Winkel $\delta\alpha\lambda$ gleich d a f, folglich das Dreyeck $\delta\alpha\lambda$ congruent mit dem Dreyeck d a f. Also ist $\alpha\lambda$ gleich a f und $\lambda\delta$ gleich f d.

Nun ist im Cirkel $\alpha\lambda : \lambda\delta = \beta\lambda : \lambda\gamma$ und im Dreyeck a b c ist nach der Annahme

das

das Dreyeck a f d dem Dreyeck b f c ähnlich, oder af : fd = cf : fb

folglich $\beta\lambda : \lambda\gamma$ = cf : fb

Nun ist $\beta\,\lambda$ gleich c f, (weil $\beta\,\delta$ gleich c d und $\delta\,\lambda$ gleich d f,) also ist $\lambda\,\gamma$ gleich fb, und daher $\alpha\lambda + \lambda\gamma$ gleich a f + fb, das ist: $\alpha\,\gamma$ gleich a b. Da nun auch $\alpha\,\beta$ gleich a c (per constr.) und $\beta\,\alpha\,\gamma$ gleich c a b (per constr.) so ist das Dreyeck $\alpha\,\gamma\,\beta$ congruent mit dem Dreyeck a b c. Das Dreyeck $\alpha\,\beta\,\gamma$ ist aber in dem gegebenen Cirkel beschrieben, also ist das Dreyeck a b c in den gegebenen Cirkel eingetragen.

Dieser Beweis gielt für jedes Dreyeck, wenn das rechtwinklichte Dreyeck dessen Hypotenuse dem Durchmesser des gegebenen Cirkels gleich ist, so beschrieben ist, daß dessen rechter Winkel an einem spitzigen Winkel des gegebenen Dreyecks liegt. Wenn aber das Dreyeck a b c ein stumpfwinklichtes Dreyeck ist, (Fig. 14.) der rechte Winkel des beschriebenen Dreyecks c a d am stumpfen Winkel b a c liegt, und c d dem Durchmesser des

ge-

gegebenen Cirkels gleich ist, ferner das Dreyeck a f b ähnlich ist dem Dreyeck c f d, oder a f sich zu f b verhält, wie c f zu f d, so wird auf folgende Art bewiesen, daß das Dreyeck a b c in den gegebnen Cirkel $\alpha\gamma\beta\delta$ (Fig. 15.) könne eingetragen werden.

Trage die Sehne $\alpha\gamma$ = a c in den Cirkel ein, mache den Winkel $\gamma\alpha\beta$ = a c b, ziehe die Sehnen $\gamma\beta$ und $\alpha\beta$, den Durchmesser $\alpha\delta$ und die Sehne $\gamma\delta$, so ist $\alpha\gamma\delta$ ein rechtwinklichtes Dreyeck und congruent mit dem Dreyeck c a d, folglich $\gamma\delta\alpha$ = a d c und $\gamma\alpha\delta$ = a c d, da nun $\gamma\alpha\beta$ = a c b (per constr.) so ist auch $\beta\alpha\delta$ = b c d, da nun auch c d = $\alpha\delta$ (per hypoth.) so ist das Dreyeck $\alpha\lambda\delta$ congruent mit dem Dreyeck c f d, folglich $\alpha\lambda$ = c f und $\lambda\delta$ = f d

Nun ist im Dreyeck a b c cf: fd = af: fb (per hypoth.)

und im Cirkel ist $\alpha\lambda : \lambda\delta = \gamma\lambda : \lambda\beta$

folglich $\gamma\lambda : \lambda\beta$ = af: fb

Nun

Nun ist $\gamma\lambda$ = af, (weil $\gamma\delta$ = ad und $\lambda\delta$ = fd,) also $\lambda\beta$ = fb. Da nun $\alpha\lambda$ = cf, so ist $\alpha\lambda + \lambda\beta$ das ist $\alpha\beta$ = cf + fb, das ist b c. Folglich das Dreyeck $\alpha\ \gamma\ \beta$ congruent mit dem Dreyeck a b c, also das gegebne Dreyeck in den gegebnen Cirkel eingetragen.

2. Satz.

Wenn ein gegebenes Dreyeck in einen gegebenen Cirkel eingetragen werden kann, so schneidet es von dem auf einer seiner Seiten beschriebenen rechtwinklichten Dreyeck, dessen Hypotenuse dem Durchmesser des gegebenen Cirkels gleich ist, einen dem Rest ähnlichen Theil ab.

Erläuterung.

Dieser Satz ist der umgekehrte vorige, und so zu verstehn. Wenn ein gegebenes Dreyeck a b c (Fig. 8.) in einen gegebenen Cirkel $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$ (Fig. 10) eingetragen werden kann, so wird sich auf einer der Seiten

ten des gegebenen Dreyecks a b c ein recht-winklichtes Dreyeck c a d beschreiben lassen, dessen Hypotenuse c d dem Durchmesser β δ des gegebenen Cirkels gleich ist, und welches eine Seite des gegebenen Dreyecks a b c so schneidet, daß sich a f zu f d verhält, wie c f zu f b, das heißt: daß die Dreyecke a f d und b f c oder der abgeschnittene Theil des rechtwinklichten, und der Rest des gegebenen Dreyecks, ähnlich sind.

Nun läßt sich auf jeder Seite eines gegebenen spitzwinklichten und stumpfwinklichten Dreyecks, das in einen gegebenen Cirkel eingetragen werden kann, ein rechtwinklichtes Dreyeck beschreiben, dessen Hypotenuse dem Durchmesser des gegebenen Cirkels gleich ist. Denn wenn das spitzwinklichte Dreyeck a d c sich in den Cirkel α β γ δ eintragen läßt, so kann jede Seite desselben, a b, b c, und a c als Sehne des Cirkels α β γ δ angesehen werden, die kleiner als der Durchmesser dieses Cirkels ist, und so auch bey einem gegebenen stumpfwinklichten Dreyeck, also läßt sich auf jeder Seite eines spitzwinklichten und stumpfwinklichten Dreyecks, ein rechtwinklich-

tes

tes Dreyeck beschreiben, dessen Hypotenuse dem Durchmesser des Cirkels gleich ist, in welchen das gegebene Dreyeck eingetragen werden kann. Ist aber das gegebene Dreyeck, das sich in einen gegebenen Cirkel eintragen läßt, ein rechtwinklichtes, so läßt sich das verlangte rechtwinklichte Dreyeck, zwar nicht auf der Hypotenuse, weil diese selbst dem Durchmesser des gegebenen Cirkels gleich ist, beschreiben, aber wohl auf den Seiten, die den rechten Winkel einschliessen.

Es sey also das gegebene Dreyeck, spitzwinklicht, stumpfwinklicht, oder rechtwinklicht, so läßt sich auf einer seiner Seiten, ein rechtwinklichtes Dreyeck beschreiben, dessen Hypotenuse dem Durchmesser des gegebenen Cirkels gleich ist, in den das gegebene Dreyeck eingetragen werden kann. Aber wird dieses rechtwinklichte Dreyeck das gegebene Dreyeck schneiden, und zwar so, wie im Satz behauptet wird?

Beweis.

Um dieses zu beweisen, wollen wir die Dreyecke in spitzwinklichte, stumpfwinklichte

und

und rechtwinklichte eintheilen, und jede Classe besonders durchgehn.

1) Das gegebene Dreyeck a b c (Fig. 8) das in den gegebenen Cirkel $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$ (Fig. 10) eingetragen werden kann, sey spitzwinklicht. Man beschreibe in diesen Cirkel (nach dem 2ten Satz im 4ten Buch Euclids,) ein Dreyeck $\alpha\ \gamma\ \beta$ das mit dem gegebenen Dreyeck a b c gleichwinklicht ist, so ist es zugleich mit diesem gegebenen Dreyeck congruent. Denn wäre dieses nicht, so muß ein anderes mit dem gegebenen congruentes Dreyeck im Cirkel möglich seyn.

Es sey dieses A, so ist A gleichwinklicht mit dem gegebenen Dreyeck a b c, also auch mit dem Dreyeck $\alpha\ \gamma\ \beta$. Nun sind die Winkel der beyden Dreyecke A und $\alpha\ \gamma\ \beta$ Peripheriewinkel in dem nehmlichen Cirkel, gleichen Peripheriewinkeln, kommen aber gleiche Bögen worauf sie stehen, und diesen gleiche Sehnen zu. Dieses sind nun die Seiten der Dreyecke A und $\alpha\ \gamma\ \beta$. Also sind in diesen Dreyecken die Seiten, die den gleichnahmigten Winkeln gegenüberliegen, gleich, folglich ist

das

das Dreyeck $\alpha\gamma\beta$ congruent mit dem Dreyeck A, also auch mit dem Dreyeck a b c. Wenn daher der Winkel $\gamma\alpha\beta$ dem b a c und $\gamma\beta\alpha$ dem b c a gleich gemacht worden, so ist auch $\alpha\beta$ = a c, $\alpha\gamma$ = a b u. s. w.

Da nun nach der Annahme das gegebne Dreyeck a b c spitzwinklicht ist, so ist es auch das Dreyeck $\alpha\gamma\beta$, folglich fällt des Cirkels Mittelpunkt $\varkappa$ innerhalb desselben. Wenn also durch die drey Winkelpunkte des Dreyecks α, γ, β, und den Mittelpunkt des Cirkels, (nehmlich von β durch $\varkappa$, von α durch $\varkappa$, von γ durch $\varkappa$) Durchmesser gezogen werden, so schneidet jeder eine Seite des Dreyecks. Man ziehe nun den Durchmesser $\beta\delta$ und die Sehne $\alpha\delta$. Im Dreyeck a b c aber, beschreibe man auf der Seite a c, die der $\alpha\beta$ correspondirt, ein rechtwinklichtes Dreyeck c a d, dessen Hypotenuse c d dem Durchmesser $\beta\delta$ gleich ist, und dessen rechter Winkel an dem Punkt a befindlich ist, der dem Punkt α correspondirt.

Da

Da der Winkel $\delta\,\alpha\,\beta$ im Halbkreis ist, so ist er ein rechter Winkel, ferner ist c d $= \beta\,\delta$ (per constr.) also ist das rechtwinklichte Dreyeck $\beta\,\alpha\,\delta$ congruent mit dem rechtwinklichten Dreyeck a c d. Folglich $\alpha\,\delta =$ a d der Winkel $\alpha\,\delta\,\beta =$ a d c und $\delta\,\alpha\,\gamma$ $=$ d a b, (weil $\delta\,\alpha\,\beta$ und d a c rechte Winkel und $\gamma\,\alpha\,\beta =$ b a c per constr.) Daher das Dreyeck $\delta\,\alpha\,\lambda$ congruent mit dem Dreyeck d a f, also $\alpha\,\lambda =$ a f und $\lambda\,\delta =$ f d. Da nun $\alpha\,\gamma =$ a b so ist $\lambda\,\gamma =$ f b, und da $\beta\,\delta =$ c d so ist $\beta\,\lambda =$ c f.

Nun ist $\beta\,\delta$ der Durchmesser, und $\alpha\,\gamma$ eine Sehne des nehmlichen Cirkels, also ist $\alpha\,\lambda : \lambda\,\delta = \beta\,\lambda : \lambda\,\gamma$.

Da aber $\alpha\,\lambda =$ a f, $\lambda\,\delta =$ f d, $\beta\,\lambda$ $=$ c f und $\lambda\,\gamma =$ f b,

so ist auch a f : f d $=$ c f : f b.

Also sind die Dreyecke a f d und b f c ähnlich, d. h. der abgeschnittene Theil des rechtwinklichten Dreyecks ist ähnlich dem Rest des gegebenen Dreyecks. Ein ähnlicher Beweis

weis kann geführt werden, wenn eine der übrigen Seiten des spitzwinklichten Dreyecks zur Basis des rechtwinklichten Dreyecks genommen wird.

2) Wenn das gegebene Dreyeck a b c stumpfwinklicht ist, (Fig. 12) und es kann in den gegebenen Cirkel $\alpha\,\gamma\,\beta\,\delta$ (Fig. 13) eingetragen werden, so beschreibe in den Cirkel das mit dem gegebenen gleichwinklichte Dreyeck $\alpha\,\gamma\,\beta$ (so daß $\alpha\,\gamma\,\beta =$ a b c, $\gamma\,\alpha\,\beta =$ b a c u. s. w.) so ist dieses Dreyeck congruent mit dem gegebenen Dreyeck a b c, also $\alpha\,\gamma =$ a b, $\alpha\,\beta =$ a c u. s. w. Da nun $\alpha\,\gamma\,\beta$ ein stumpfer Winkel ist, so liegt des Cirkels Mittelpunkt $\varkappa$ ausserhalb dem Dreyeck $\alpha\,\beta\,\gamma$ Wenn also vom stumpfen Winkel durch den Mittelpunkt ein Durchmesser gezogen wird, so schneidet nur dieser eine Seite des Dreyecks, nehmlich die, welche dem stumpfen Winkel gegenüberliegt, zieht man aber von den spitzigen Winkeln $\gamma\,\alpha\,\beta$ und $\gamma\,\beta\,\alpha$ durch $\varkappa$ Durchmesser, so liegen diese ganz ausserhalb dem Dreyeck. Hier giebt es also zwey Fälle, die besonders durchgegangen werden müssen.

Im

Im ersten Fall ziehe den Durchmesser $\gamma\ \delta$, so schneidet dieser $\alpha\ \beta$ in λ. Ferner ziehe die Sehne $\alpha\ \delta$ so ist $\gamma\ \alpha\ \delta$ ein rechtwinklichtes Dreyeck, dessen Hypotenuse $\gamma\ \delta$ der Durchmesser ist, und dessen rechter Winkel an einem spitzigen Winkel des gegebenen Dreyecks liegt.

Beschreibe nun im Dreyeck a b c, auf der Seite a b die der $\alpha\ \gamma$ entspricht, ein rechtwinklichtes Dreyeck, dessen Hypotenuse $= \gamma\ \delta$ ist, und das mit dem Dreyeck $\gamma\ \alpha\ \delta$ ähnlich liegt, d. h. dessen rechten Winkel am Punkt a des spitzigen Winkels liegt, der dem Punkt α correspondirt Nun ist das Dreyeck b a d congruent mit dem Dreyeck $\gamma\ \alpha\ \delta$, und a c ist $= \alpha\ \beta$, also schneidet b d die a c, dieß sey in f. Es ist auch $\alpha\ \delta =$ a d, $\alpha\ \delta\ \gamma =$ a d b und $\beta\ \alpha\ \delta =$ c a d, (weil $\gamma\ \alpha\ \delta$ und b a d rechte Winkel, und $\gamma\ \alpha\ \beta =$ b a c p. constr.) also ist das Dreyeck $\lambda\ \alpha\ \delta$ congruent mit dem Dreyeck f a d, folglich $\alpha\ \lambda =$ a f und $\lambda\ \delta =$ f d. Da nun $\gamma\ \delta =$ b d

und $\alpha\,\beta = a\,c$, so ist auch $\gamma\,\lambda = b\,f$ und $\lambda\,\beta = f\,c$.

Nun ist $\gamma\,\delta$ der Durchmesser und $\alpha\,\beta$ eine Sehne des nehmlichen Cirkels, also ist

$$\alpha\,\lambda : \lambda\,\delta = \gamma\,\lambda : \lambda\,\beta$$

Daher. $a\,f : f\,d = b\,f : f\,c$

Folglich das Dreyeck $a\,f\,d$ ähnlich dem Dreyeck $b\,f\,c$, d. h. der abgeschnittene Theil des rechtwinklichten Dreyecks ähnlich dem Rest des gegebenen Dreyecks.

Im zweyten Fall ziehe den Durchmesser $\alpha\,\mu$ und die Sehne $\gamma\,\mu$, so liegt der Durchmesser ganz ausserhalb dem Dreyeck $\alpha\,\gamma\,\beta$, aber da der rechte Winkel kleiner als ein stumpfer Winkel ist, und am Punkt γ des stumpfen Winkels $\alpha\,\gamma\,\beta$ liegt, so fällt die Sehne $\gamma\,\mu$ zwischen $\alpha\,\gamma$ und $\gamma\,\beta$ und schneidet folglich die Seite $\alpha\,\beta$. Dieß sey im Punkt ν. Beschreibe im Dreyeck $a\,b\,c$ ein rechtwinklichtes Dreyeck, dessen Hypotenuse $a\,g$ dem Durchmesser des gegebenen Cirkels

gleich

gleich ist, auf der Seite a b die der $\alpha\ \gamma$ correspondirtl, so daß der rechte Winkel am Punkt b des stumpfen Winkels gesetzt wird: so ist das Dreyeck a b g congruent und ähnlich liegend mit dem Dreyeck $\alpha\ \gamma\ \mu$ folglich schneidet der Kathetus b g die Seite a c, dieß sey in h. Da $\gamma\ \mu\ \alpha$ = b a g, $\alpha\ \mu$ = a g und $\beta\ \alpha\ \mu$ = c a g, (weil $\gamma\ \alpha\ \mu$ = b a g und $\gamma\ \alpha\ \beta$ = b a c,) so ist das Dreyeck $\nu\ \alpha\ \mu$ congruent mit dem Dreyeck h a g. Also $\alpha\ \nu$ = a h und $\nu\ \mu$ = h g folglich auch $\gamma\ \nu$ = b h und $\nu\ \beta$ = h c.

Nun sind $\gamma\ \mu$ und $\alpha\ \beta$ Sehnen des nehmlichen Cirkels, also ist

$$\alpha\nu : \nu\mu = \gamma\nu : \nu\beta$$

Daher auch a h : h g = b h : h c

Folglich die Dreyecke a h g und b h c ähnlich, d. i. der abgeschnittene Theil des rechtwinklichten Dreyecks ist dem Rest des gegebenen ähnlich.

Ein dritter Fall, wenn nehmlich auf a c, d. h. der Seite, die dem stumpfen Winkel

 des

des gegebenen Dreyecks gegenüberliegt, ein rechtwinklichtes Dreyeck beschrieben wird, kommt hier nicht in Betrachtung, weil dieses Dreyeck die Seite a b oder b c nicht immer, sondern nur dann schneidet, wenn der spitzige Winkel desselben kleiner ist, als der mit ihm auf einer Linie und an dennehmlichen Punkt liegende spitzige Winkel des gegebenen Dreyecks.

3) Wenn das gegebene Dreyeck a b c rechtwinklicht ist. (Fig 11.) und es kann in den gegebenen Cirkel α β γ δ (Fig. 9) eingetragen werden, so beschreibe im Cirkel das mit dem gegebenen Dreyeck gleichwinklichte α β γ, so daß α β γ dem rechten Winkel a c b, gleich sey, und β γ α = a b c, so ist das Dreyeck α β γ congruent mit dem gegebenen Dreyeck a b c, also β γ = c b, α γ = a b rc. Nun ist, weil α β γ ein rechter Winkel, α γ der Durchmesser, also a b dem Durchmesser des gegebenen Cirkels gleich. Beschreibe auf einen Kathetns a c des gegebenen Dreyecks a c b, ein recht-

winkl-

winklichtes Dreyeck, dessen Hypotenuse c d dem Durchmesser des gegebenen Cirkels gleich ist, und dessen rechter Winkel d a c an dem einen spitzigen Winkel b a c des gegebenen Dreyecks liegt. Nun ist d a c = b c a, a c = a c und c d = a b, folglich das Dreyeck c a d congruent mit dem Dreyeck a c b, also c b = a d, a d c = a b c und d c a = b a c, daher auch b a d = d c b, folglich das Dreyeck b c f congruent mit dem Dreyeck d a f. Congruent ist aber, was gleich und ähnlich ist, also ist das Dreyeck d a f auch ähnlich mit dem Dreyeck b c f, d. h. der abgeschnittene Theil des rechtwinklichten Dreyecks ist ähnlich dem Rest des gegebenen Dreyecks.

Dieser Beweis gilt auch, wenn auf dem andern Kathetus b c ein solches und ähnlich liegendes rechtwinklichtes Dreyeck beschrieben wird. Auf der Hypotenuse a b läßt sich aber kein rechtwinklichtes Dreyeck beschreiben, dessen Hypotenuse dem Durchmesser des gegebenen Cirkels gleich, und dessen Kathetus die Seite a b wäre, und bey einer der oben ange-

gegebenen entgegengesetzten Stellung des rechtwinklichten Dreyecks auf den Katheten b c oder a c des gegebenen Dreyecks, fällt das beschriebene rechtwinklichte Dreyeck mit dem gegebenen zusammen.

Anmerkung.

Aus dem bisshergesagten erhellt die Wahrheit des Satzes: Wenn ein gegebenes Dreyeck, (es sey ein spitzwinklichtes, stumpfwinklichtes oder rechtwinklichtes) in einen gegebenen Cirkel eingetragen werden kann, so wird es von dem auf einer seiner Seiten beschriebenen rechtwinklichten Dreyeck, (nehmlich beym spitzwinklichten Dreyeck, von dem auf einer beliebigen Seite, beym stumpfwinklichten Dreyeck, von dem auf einer der Seiten, die den stumpfen Winkel einschliessen, und beym gegebenen rechtwinklichten Dreyeck, von dem auf einen der Catheten, in der gehörigen Lage beschriebenen rechtwinklichten Dreyeck,) dessen Hypotenuse dem Durchmesser des gegebenen Cirkels gleich ist, einen dem Rest ähnlichen Theil abschneiden.

3. Satz.

Wenn ein gegebenes Dreyeck von der Beschaffenheit ist, daß auf keiner seiner Seiten ein rechtwinklichtes Dreyeck beschrieben werden kann, dessen Hypotenuse dem Durchmesser des gegebenen Cirkels gleich ist, und von dem das gegebene Dreyeck einen dem Rest ähnlichen Theil abschneidet, so kann das gegebene Dreyeck in den gegebenen Cirkel nicht eingetragen werden.

Denn man setze es könne eingetragen werden, so kann auf einer seiner Seiten ein rechtwinklichtes Dreyeck beschrieben werden, dessen Hypotenuse dem Durchmesser des gegebenen Cirkels gleich ist, und von dem das gegebene Dreyeck einen Theil abschneidet, der dem Rest des gegebenen Dreyecks ähnlich ist, (2. Satz, Anmerkung,) gegen das Angenommene.

4. Satz.

Wenn ein gegebenes Dreyeck in einen gegebenen Cirkel nicht eingetragen werden kann, so läßt sich entweder gar kein rechtwinklichtes Dreyeck, dessen Hypotenuse dem Durchmesser des gegebenen Cirkels gleich ist, auf einer Seite desselben beschreiben, oder wenn dieß möglich ist, so schneidet es doch von demselben keinen dem Rest ähnlichen Theil ab.

Das erstere ist klar, so bald eine, oder zwey, oder alle Seiten des gegebenen Dreyecks, so groß, oder grösser sind, als der Durchmesser des gegebenen Cirkels.

Ist aber jede Seite des gegebenen Dreyecks kleiner als dieser Durchmesser, so läßt sich zwar das verlangte Dreyeck auf ihnen beschrieben, aber dessen abgeschnittener Theil ist nicht ähnlich, dem Rest des gegebenen Dreyecks, denn wäre dieses, so könnte das gegebene Dreyeck in den gegebenen Cirkel eingetragen werden, (1. Satz.) gegen das Angenommene.

Der

Der hier aufgestellte erste und dritte Satz, sind nun meiner Meinung nach, mit dem, was Plato den Socrates vortragen läßt, einerley. Die Absicht des Socrates war nehmlich zu untersuchen, ob die Tugend gelehrt werden könne, oder nicht. Es sollte also bestimmt werden, ob der Tugend dieses Prädicat zukomme oder nicht. Diese Frage hat nun mit der mathematischen: ob ein gegebenes Dreyeck in einen gegebenen Cirkel eingetragen werden kann, die Aehnlichkeit, daß in beyden Fällen gefragt wird, ob einem Gegenstand ein gewisses Prädicat zukommt? So wie nun die Mathematiker hier öfters genöthigt sind, zu einer Hypothesis ihre Zuflucht zu nehmen, indem sie den nur mit den Merkmalen der Gattung gegebenen Gegenstand in eine unter die Gattung gehörige Art setzen, d. h. dem gegebenen Gegenstand erst ein anderes Prädicat beylegen, ehe sie im Stande sind, auf die Frage zu antworten: ob dem Gegenstand ein gewisses Prädicat zukommt, so glaubte Socrates in dem Fall zu seyn, daß er sich nach einem Prädicat umsehen müßte, um vermittelst desselben zu entscheiden, ob die Tugend gelehrt

wer-

werden könne, oder nicht. Er nahm also an: Wenn die Tugend eine Wissenschaft ist, so kann sie gelehrt werden, wenn sie aber keine Wissenschaft ist, so kann sie nicht gelehrt werden. Diese Hypothesis ist aber in der Philosophie nichts anders als das Aufstellen eines Mittelbegrifs, der mit dem Prädicat, (gelehrt werden,) von dem es noch ungewiß ist, ob es dem Subject, (der Tugend,) zu kommt, einerley, oder identisch seyn muß, wenn der verneinende Satz richtig seyn soll.

Ich setze nun die mathematische Stelle selbst her, aber nicht nach der gewöhnlichen Lesart, sondern so, wie ich sie lese. Weiter unten werde ich die Gründe angeben, die mich bewogen haben, diese wenigen Veränderungen mit dem Text vorzunehmen.

Σωκράτης.

Λέγω δὲ τὸ ἐξ ὑποθέσεως ὧδε, ὥσπερ οἱ γεωμέτραι πολλάκις σκοποῦνται, ἐπειδάν τις ἔρηται αὐτοὺς, οἷον περὶ χωρίου, εἰ οἷόντε ἐς τόνδε τὸν κύκλον τόδε τὸ χωρίον τρίγωνον ἐνταθῆναι, εἴποι ἂν τις ὅτι οὔπω

οἶδα

οἶδα εἰ ἐςτι τοῦτο τοιοῦτον. ἀλλ' ὥσπερ μέν τινα ὑποθεσιν προὔργου οἶμαι ἔχειν πρός τὸ πρᾶγμα, τοίανδε· εἰ μέν ἐςι τουτο τὸ χωρίον τοιοῦτον, (8 Eig a b c) οἷον, παρὰ τὴν δοθεῖσαν (β δ, Fig. 10) αὐτοῦ γραμμὴν (a c 8 Fig) ὑποτείναντα, (ad dc) ἐλλείπειν τοιούτῳ χωρίῳ (b f c) οἷον ἂν αὐτό τό παρατετμημένον (a f d) ᾖ, ἄλλό τι συμβαίνειν μοι δοκεῖ, καί ἄλλο αὖ, εἰ ἀδύνατόν ἐςι ταῦτα παθεῖν· ὑποθέμενος οὖν, ἐθέλω εἰπεῖν σοι τὸ συμβαῖνον περί τῆς ἐντάσεως αὐτοῦ εἰς τὸν κύκλον, εἴτε ἀδύνατον, εἴτε μή.

Uebersetzung.

Ich sage, nach der Annahme, auf die Art, wie die Mathematiker öfters ihre Untersuchungen anstellen, wenn man ihnen eine Frage vorlegt, zum Beyspiel: ob diese Dreyeckigte Figur a b c (8. Fig.) in diesen Cirkel α β γ δ (10. Fig) könne eingetragen werden. Hier möchte jemand sagen, ich weiß noch nicht, ob dieses angeht, ich glaube aber, fol-

gende Annahme könne zu dieser Beurtheilung dienlich seyn. Wenn nehmlich dieses Dreyeck a b c von der Beschaffenheit ist, daß, wenn man nach dem gegebenen Durchmesser β δ, an seiner Seite a c eine Hypotenuse c d zieht, von demselben ein Rest b f c übrig bleibt, der dem abgeschnittenen Theil a f d ähnlich ist, so glaube ich, es werde das Resultat von dem, wenn das Dreyeck a b c diese Beschaffenheit nicht hat, ganz verschieden seyn. Wenn ich nun dieses oder jenes annehme, so bin ich im Stande Dir zu sagen, ob das Eintragen des Dreyecks a b c in den Cirkel α β γ δ möglich ist, oder nicht.

Anmerkungen.

Die zwey Wörter, bey welchen ich von der gewöhnlichen Lesart abgewichen bin, sind παρατείναντα und παρατεταμένον. Statt des ersten lese ich ὑποτείναντα und daraus folgt die Veränderung des Zweyten in παρατετμημένον von selbst.

ὑπο-

ὑποτεινειν eigentlich Subtendere, bedeutet hier: ὑποτείνουσαν ἀγαγεῖν eine Hypotenuse ziehen. Eine Hypotenuse, ὑποτείνουσα γραμμή ist aber bekanntlich die Linie, die in einem rechtwinklichten Dreyeck dem rechten Winkel gegenüberliegt. Eine Hypotenuse ziehen, heißt also: einen rechten Winkel, durch eine gerade Linie schliesen.

ὑποτεινειν παρα τήν δοθεῖσαν, (nehmlich διαμετρον) τὴν γραμμὴν αὐτοῦ (nehmlich χωριου τριγωνου) heißt: an der Seite des gegebenen Dreyecks eine Hypotenuse ziehen, die dem gegebenen Durchmesser gleich ist, das ist: an dem einen Endpunkt der Seite des gegebenen Dreyecks einen rechten Winkel setzen, und diesen mit einer geraden Linie schliessen, die dem Durchmesser des gegebenen Cirkels gleich ist, und deren einer Endpunkt mit dem andern Endpunkt der Seite des gegebenen Dreyecks zusammen trift.

Es sey z. E. (8. Figur) a c die Seite des gegebenen Dreyecks a b c, an der man eine Hypotenuse ziehen soll, die dem Durchmesser

messer $\beta\ \delta$ des gegebenen Cirkels $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$ (10. Fig.) gleich ist, so errichte man am Punkt a eine Perpendicularlinie a d von unbestimmter Långe, und beschreibe aus dem Punkt c mit einem Halbmesser c d der gleich $\beta\ \delta$ ist, einen Cirkel, dieser schneidet nun entweder a d oder nicht. Schneidet er a d nicht, (welches geschieht, wenn a c gleich c d oder grösser als c d ist,) so kann an a c keine Hypotenuse gezogen werden, die dem Durchmesser $\beta\ \delta$ gleich ist, schneidet er aber das Perpendikel a d, so giebt dieß ein rechtwinklichtes Dreyeck, a d c, dessen rechter Winkel d a c ist, das auf einer Seite a c des gegebenen Dreyecks steht, und dessen Hypotenuse c d dem Durchmesser $\beta\ \delta$ des gegebenen Cirkels gleich ist.

Nehmen wir nun an, daß die Hypotenuse c d, die Seite a b des gegebenen Dreyecks im Punkt f schneidet, so entstehen zwey Dreyecke, a f d und b f c. Das Dreyeck b f c kann angesehen werden, als ein Stück des gegebenen Dreyecks a b c, welches durch

die

die Linie c f von demselben weggenommen wird, so daß von dem gegebenen Dreyeck nur das Stück a f c übrig bleibt, also das Stück b f c daran fehlt. Das Dreyeck a f d aber ist ein Theil des rechtwinklichten Dreyecks a d c, der durch die Seite a b, von dem rechtwinklichten Dreyeck abgeschnitten wird. Wenn nun dem gegebenen Dreyeck eine solche Figur b f c fehlet, (ει ελλειπει τοιουτῳ χωριῳ) die von ähnlichen Beschaffenheit (οιον) mit dem abgeschnittenen Theil a f d ist, so kann es in den gegebenen Cirkel eingetragen werden, wenn es aber nicht von der Beschaffenheit ist, so kann es nicht eingetragen werden, wie oben (im ersten und dritten Satz) bewiesen wurde.

Es ist leicht zu zeigen, wie ein Abschreiber auf dem Gedanken kommen konnte, ὑποτεινάντα, in παρατειναντα zu verwandeln. Wenn er nehmlich mit der mathematischen Terminologie nicht bekannt genug war, und folglich nicht verstund, was ὑποτειναντα bedeutete, so mußte er darauf verfallen παρα-

τειναντα, zu setzen. Denn der Ausdruck eine Linie verlängern, ist jedermann verständlich, wiewohl dieses bey den griechischen Mathematikern ἐκβαλλειν γραμμὴν heißt. Wenn aber eine Seite des gegebenen Dreyecks verlängert wird, z. E. (Fig. 16) a c nach f, und man zieht die Linie b f aus den Endpunkt b einer andern Seite a b auf die verlängerte Linie, so schneiden die Dreyecke a b c und b c f einander nicht, aber b c f kann nach der gemeinen Vorstellungsart, als eine Verlängerung des Dreyecks a b c angesehen werden, daher mußte dann auch der Ausdruck παρατετμημενον in παρατεταμενον verändert werden. Ob aber diese Figur a b c f eine Eigenschaft enthält, woraus sich schliessen läßt, das Dreyeck a b c könne in einen gewissen Cirkel eingetragen werden, oder ob diese Figur in dieser Rücksicht gar nichts bestimmt, dieß konnte dieser Abschreiber wohl nicht beurtheilen, sonst würde er diese Veränderung des Textes nicht gewagt haben.

τοιούτῳ χωρίῳ οἷον ἂν αὐτὸ - - - ᾖ. Dieser etwas unbestimmte Ausdruck, ist vielleicht

leicht deswegen gewählt, weil bey einem gegebenen rechtwinklichten Dreyeck, das sich in einen Cirkel eintragen läßt, der Rest dem abgeschnittnen Theil nicht nur ähnlich sonder auch gleich ist, (2. Satz, Nro. 3.) τοιουτῳ — οιον kann aber so wohl die Aehnlichkeit, als die Congruenz bedeuten.

Das bishergesagte, ist wie ich glaube, hinlänglich, die Schwierigkeiten dieser Stelle zu heben, und das Dunkle derselben aufzuklären. Aber noch halte ich mich verbunden, die Gründe anzugeben, warum ich von dem Versuch, den Herr Gedike gemacht hat, diese Stelle zu erklären, abgehe.

Erstens, halte ich für unwahrscheinlich, daß aus τετράγωνον sollte τρίγωνον entstanden seyn, da kurz vorher τετράγωνον öfters vorkommt, und also jedem Abschreiber geläufig seyn mußte.

Zweytens ist nicht die Frage, ob sich um eine gegebene Figur ein Cirkel beschreiben

läßt, sondern ob die gegebene Figur in einen gegebenen Cirkel eingetragen werden kann.

Drittens würde τετραγωνον χωριον wohl nicht eine vierseitige Figur überhaupt, sondern ein Quadrat bedeuten, wie schon die Erklärung, die Socrates selbst kurz zuvor dem Sclaven des Meno giebt, und die vorhin erklärte Stelle im Theätet, zeigt.

Viertens ist die von dem Herrn Gedike angegebene Hyothesis: wenn eine gegebene vierseitige Figur ein rechtwinklichtes Parallelogramm ist, so läßt sich um sie ein Cirkel beschreiben, unrichtig. Denn dieser Satz ist wohl wahr, ober wenn er eine richtige Hypothesis enthalten soll, so muß er sich umkehren lassen. Nun heißt der umgekehrte Satz: Eine vierseitige Figur, um die sich ein Cirkel beschreiben läßt, ist ein rechtwinklichtes Parallelogramm. Allein dieser Satz ist falsch, und daher der negative: wenn eine gegebene vierseitige Figur kein rechtwinklichtes Parallelogramm ist, so kann kein Cirkel um sie beschrieben werden, denn nach dem 22. Satz

des

des 3ten Buchs in Euclids Elementen kann man sich eine vierseitige Figur die keine rechten Winkel hat, und kein Parallelogramm ist, in einem Cirkel beschrieben gedenken, wenn nur die Gegenwinkel dieser Figur zwey rechte Winkel betragen. Also ist die richtige Hypothesis: wenn in einer vierseitigen Figur die Gegenwinkel zwey rechte betragen, so läßt sich ein Cirkel um sie beschreiben. Aber diese Hypothesis wird man schwerlich aus den Worten des Socrates erzwingen können, wenn man auch noch so sehr an ihnen künsteln wollte.

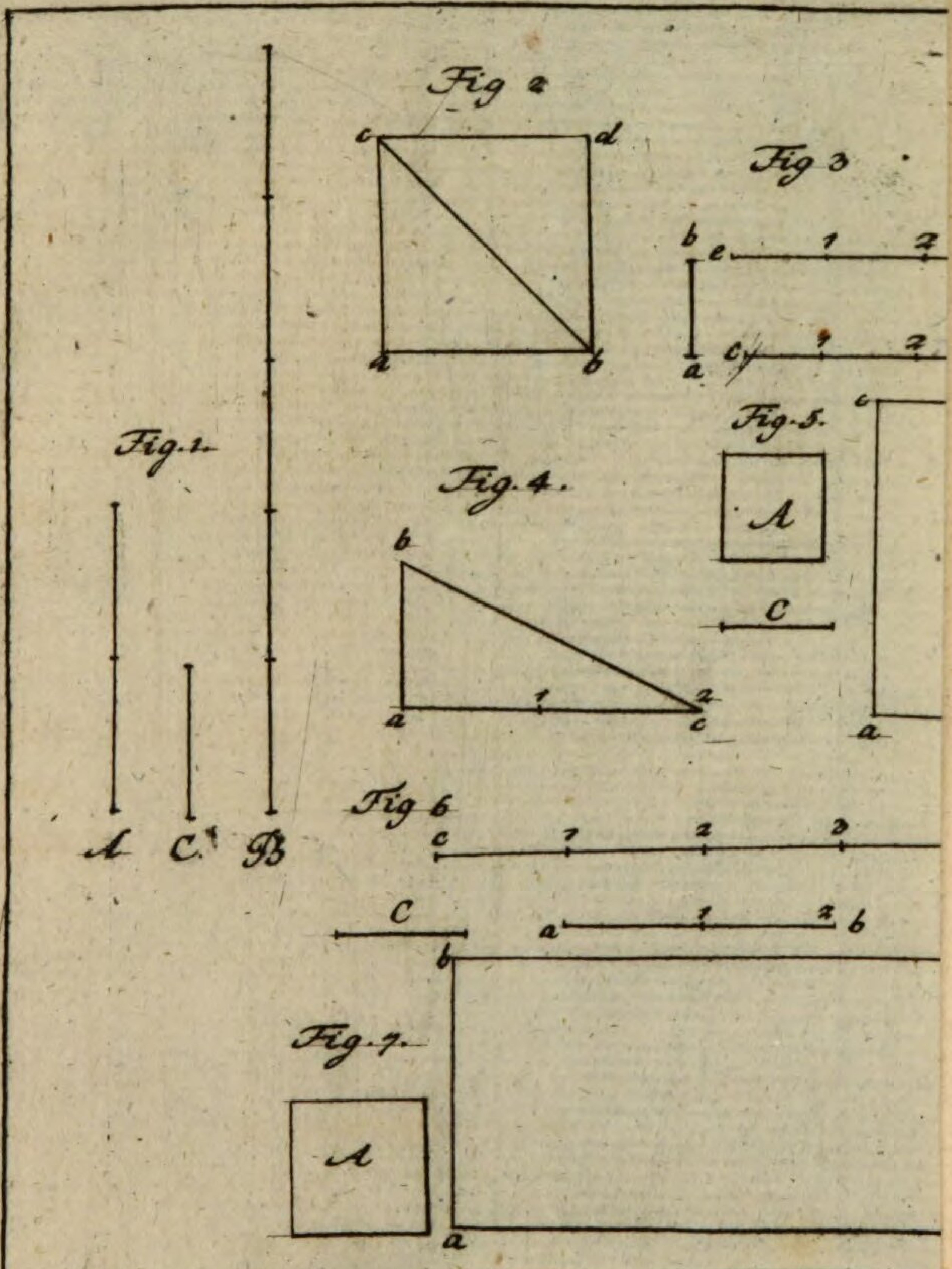
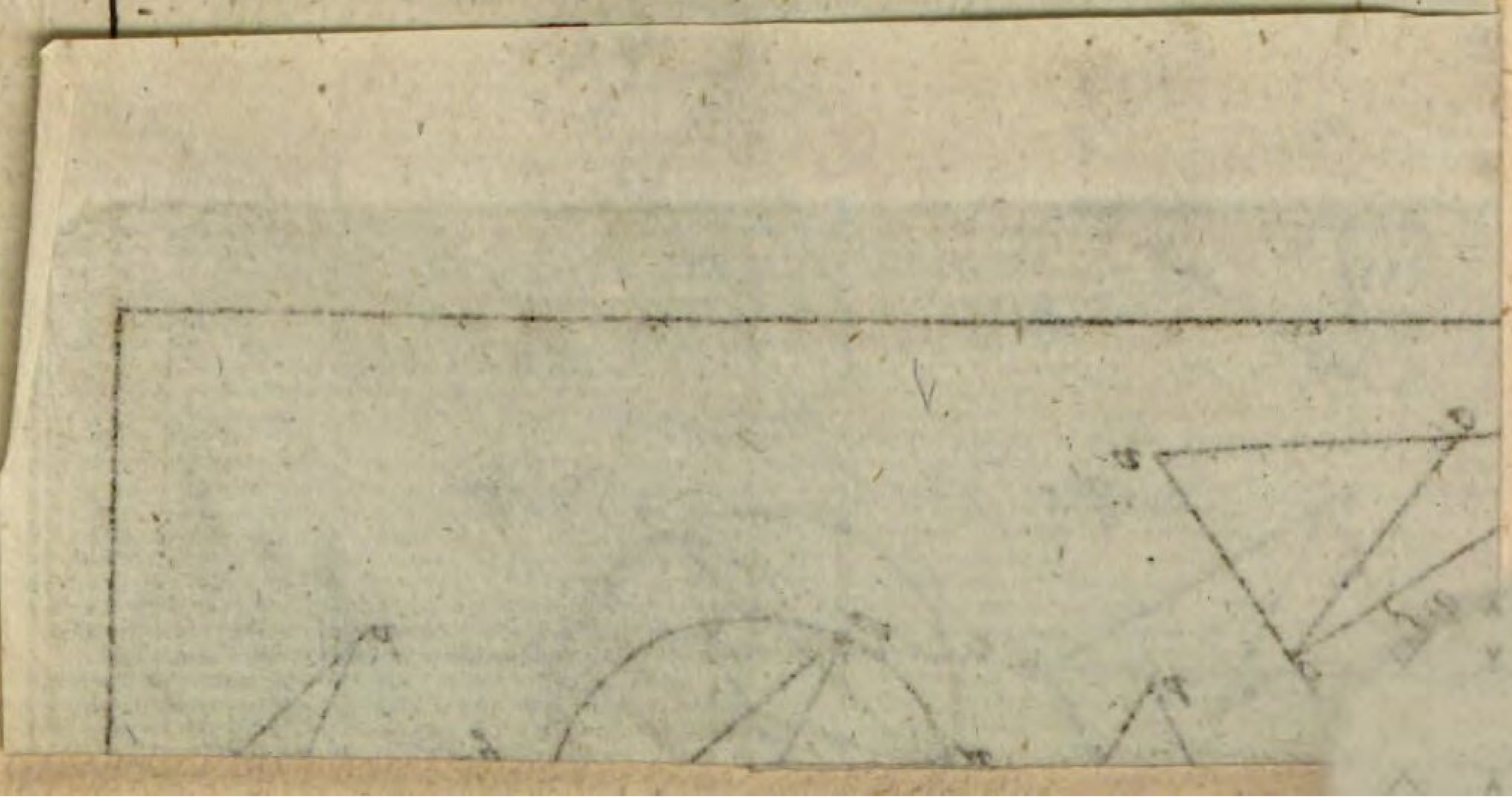
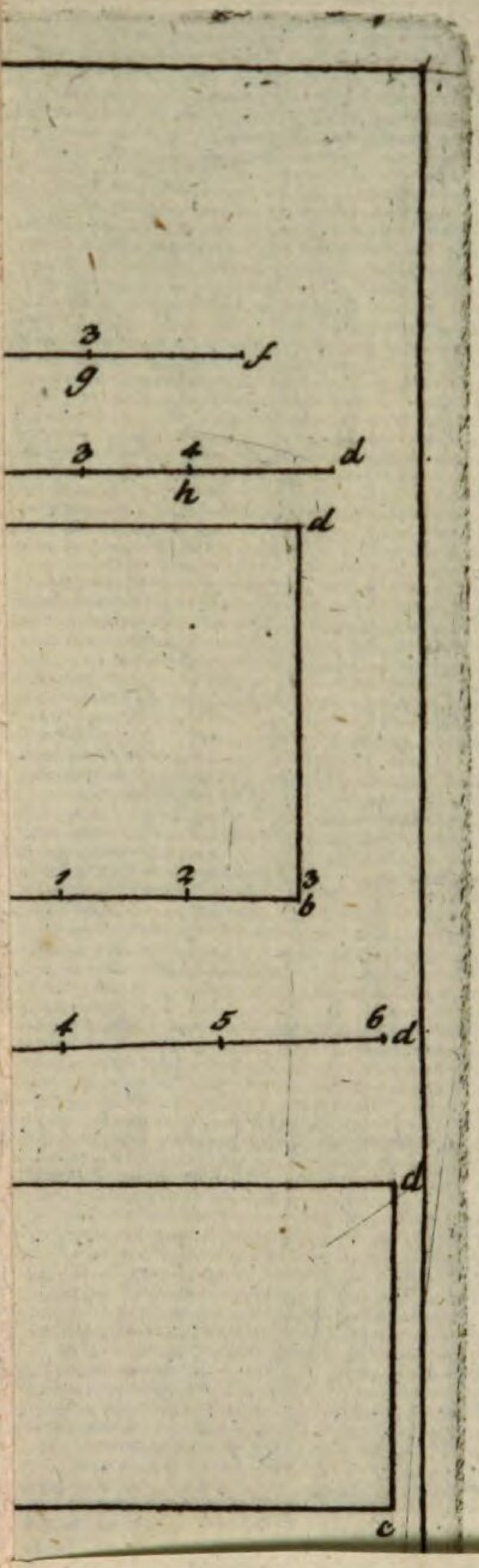
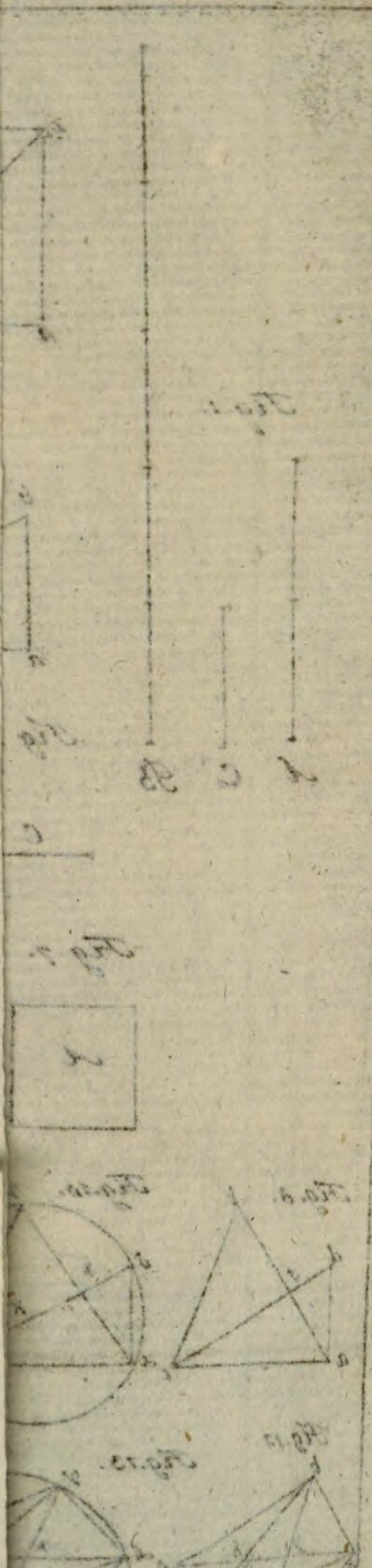


Fig. 1.
A C B
Fig 2
c d a b
Fig 3
b e 1 2
a c 1 2
Fig. 4.
b a 1 2 c
Fig. 5.
A
C
c a
Fig 6
c 1 2 3
C
a 1 2 b
b
Fig. 7.
A
a




3
g
f
3
4
h
d
d
1
2
3
b
4
5
6
d
d
c



nne

Bayerische StaatsBibliothek

Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Müller, Johann Wolfgang

Commentar über zwey dunkle mathematische Stellen in Plato's Schriften, wovon die eine im Theätet, die andere im Memo vorkommt Mit einer Kupfertafel

Nürnberg 1797

A.gr.b. 2726
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10237607-7
VD18 10160221